Aufgabe 3

Zeigen Sie durch Indexverschiebung die verallgemeinerte binomische Formel für $a, b \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$:

$$(a-b)\sum_{k=0}^{n} a^k b^{n-k} = a^{n+1} - b^{n+1}$$

Lösung

$n=1$: $(a-b)\sum_{k=0}^{1} a^k b^{n-k} = (a-b)(b+a) = a^2 - b^2$

$n=2$: $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$

Beweis $(a-b)\sum_{k=0}^{n} a^k b^{n-k}$

$$= \sum_{k=0}^{n} a^{k+1} b^{n-k} - \sum_{k=0}^{n} a^k b^{n-k+1}$$

$l = k+1 \Leftrightarrow k = l-1$

$: k=0 \to l=1$

$k = n-1 \to l = n$

$$= a^{n+1} - b^{n+1} + \underline{\sum_{k=0}^{n-1} a^{k+1} b^{n-k}}$$

$$- \sum_{k=1}^{n} a^k b^{n-k+1}$$

$$= a^{n+1} - b^{n+1} + \sum_{l=1}^{n} a^l b^{n-(l-1)}$$

$$- \sum_{k=1}^{n} a^k b^{n-k+1}$$

$l = k$

$$= a^{n+1} - b^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \left(a^k b^{n-k+1}\right)$$

$$- \sum_{k=1}^{n} a^k b^{n-k+1}$$

$$= a^{n+1} - b^{n+1}$$

Aufgabe 4

$$\sum_{k=1}^{2}\sum_{n=2}^{2k}\binom{n+1}{k}$$

$$=\sum_{n=2}^{2}\binom{n+1}{1}+\sum_{n=2}^{4}\binom{n+1}{2}$$

$$=\binom{3}{1}+\binom{3}{2}+\binom{4}{2}+\binom{5}{2}$$

$$=\frac{3!}{1!\,2!}+\frac{3!}{2!\,1!}+\frac{4!}{2!\,2!}+\frac{5!}{2!\,3!}$$

$$\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$=3+3+\frac{4\cdot 3}{2}+\frac{5\cdot 4}{2}$$

$$n! = n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdots 2\cdot 1$$

$$=22$$