

51	52	53	54	55	Σ

Gruppe

Karlsruhe, den 10.01.2013

Matrikel-Nr.:

Matrikel-Nr.:

Matrikel-Nr.:

11. Übungsblatt zur Vorlesung Höhere Mathematik I für biw/ciw/mach/mage/vt

Aufgabe 51: Benutzen Sie den Mittelwertsatz der Differentialrechnung:

(a) Beweisen Sie die Ungleichung

$$\ln(1+x) \leq \frac{x}{\sqrt{1+x}} \quad \text{für } x > 0.$$

Hinweis: Betrachten Sie $f(t) = \ln(1+t) - \frac{t}{\sqrt{1+t}}$ im Intervall $[0, x]$.

(b) Zeigen Sie die Einschließung

$$1 - \frac{1}{x} < \ln x < x - 1, \quad x \in (1, \infty).$$

Wie lässt sich hiermit die reelle Zahl $a = 2 \ln 3 - 3 \ln 2$ einschließen?

Hinweis: Betrachten Sie $f(t) = \ln t$ für $t \in (1, x)$.

Aufgabe 52: Bestimmen Sie die Grenzwerte

(a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x + 3x - 1}{2x},$ (b) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^a - a^x}{a^x - a^a}, \quad a > 0, a \neq 1,$ (c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 \ln x}{x^b}, \quad b > 0,$ (d) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(\ln x)}{\ln x}.$

Aufgabe 53: Ermitteln Sie $c \in \mathbb{R}$, sodass die Funktion $f: \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-1} - \frac{1}{\ln x} & \text{für } x \neq 1, \\ c & \text{für } x = 1, \end{cases}$$

stetig ist.

Aufgabe 54: Die Funktion $f: [-1, 2) \cup (2, 3] \rightarrow \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$f(x) = \frac{x^3 - 4x^2 + x + 6}{x - 2}.$$

Zeigen Sie, dass $f(x) \leq 0$ für alle $x \in [-1, 2) \cup (2, 3]$ gilt.

Aufgabe 55: Die S-Bahn S3 darf auf der Strecke Karlsruhe-Bruchsal maximal 160 km/h fahren. Der Stromverbrauch für den Betrieb der S3 ist proportional zum Quadrat ihrer Geschwindigkeit. Bei einer Geschwindigkeit von 50 km/h betragen die Stromkosten der Lokomotive 100 EUR pro Stunde. Außerdem entstehen feste Kosten in Höhe von 400 EUR pro Stunde (Personalkosten, Wartungskosten etc.).

- (a) Bei welcher Geschwindigkeit sind die Betriebskosten pro gefahrenem Kilometer am geringsten?
- (b) Im Tagesmittel betragen die Einnahmen 14 EUR pro gefahrenem Kilometer. Wie schnell sollte die S-Bahn fahren, damit der Gesamtgewinn (also die Differenz zwischen Einnahmen und Kosten) pro Stunde möglichst groß wird?

11. Tutorium
zur Vorlesung Höhere Mathematik I für
biw/ciw/mach/mage/vt

Aufgabe T32: Zeigen Sie mit Hilfe des Mittelwertsatzes der Differentialrechnung

(a) die Ungleichung

$$|\cos e^x - \cos e^y| \leq |x - y|$$

für $x, y \leq 0$,

(b) den Grenzwert

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[3]{n^2 + k^2} - \sqrt[3]{n^2}) = 0.$$

Hinweis: Betrachten Sie die Funktion $x \mapsto \sqrt[3]{x}$.

Aufgabe T33: Bestimmen Sie die angegebenen Grenzwerte. Begründen Sie, warum Sie die Regel von de l'Hospital in Teil (c) nicht anwenden dürfen.

(a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - x}{x^3}$

(b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 e^x}{(e^x - 1)^2}$

(c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - \sin x}{x + \sin x}$

Aufgabe T34: Zeigen Sie für $x \in [-1, 1]$

$$-1 + x - \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} \leq \arctan(x) \leq 1 + x + \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}.$$

Hinweis: Untersuchen Sie Extrema der Differenzen der Terme.

Alle aktuellen Informationen zur Veranstaltung finden Sie auf der Internetseite unter:
www.math.kit.edu/iag1/lehre/hm1mach2012w/