Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Algebra und Geometrie
PD Dr. F. Hettlich
Dr. M. J. Krause
Dipl.-Math. J. Stompe

16	17	18	19	20	$\sum$

Gruppe

Karlsruhe, den 08.11.2012

Matrikel-Nr.: ....

Matrikel-Nr.: ....

Matrikel-Nr.: ....

4. Übungsblatt zur Vorlesung Höhere Mathematik I für biw/ciw/mach/mage/vt

Aufgabe 16: Gegeben sei die Folge $(a_n)_n$ mit den Gliedern

$$a_n = \frac{n(n+3)-4}{n^2-1}\,, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Untersuchen Sie die Konvergenz, indem Sie einen Folgenindex N derart bestimmen, dass $|a_n - 1| < \varepsilon$ für alle $n \geq N$, wenn

$$\text{(i) } \varepsilon = \frac{1}{10}\,, \qquad \text{(ii) } \varepsilon = \frac{1}{100}\,, \qquad \text{(iii) } \varepsilon > 0 \text{ beliebig ist.}$$

Ist die Folge $(a_n)_n$ konvergent, und wenn ja, welchen Grenzwert hat sie?

Aufgabe 17: Bestimmen Sie den Grenzwert der Folge $(a_n)_n$ mit

$$\text{(a)} \quad a_n = \sqrt[n]{4 + \frac{n-1}{n+1}}\,, \qquad \text{(b)} \quad a_n = \frac{n^4-2}{n^2+4} + \frac{n^3(3-n^2)}{n^3+1}\,, \qquad n \in \mathbb{N}\,.$$

Aufgabe 18: Untersuchen Sie die Folgen mit den Gliedern

$$\text{(a)} \quad a_n = \sqrt{q^n + n} - \sqrt{n} \quad \text{mit festem } q > 0, \qquad \text{(b)} \quad b_n = \frac{2}{n+1}\prod_{k=1}^{n}\left(1 + \frac{2}{k}\right) - \sqrt{n^2+1}\,, \qquad n \in \mathbb{N}\,,$$

auf ihr Konvergenzverhalten, d.h. auf Konvergenz und Divergenz. Geben Sie evtl. vorhandene Grenzwerte an.
Hinweis zu Teil (b): Beweisen Sie induktiv, dass für $p_n := \frac{2}{n+1}\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{2}{k}\right), n \in \mathbb{N}$ gilt: $p_n = n+2$.

Aufgabe 19: Bestimmen Sie die Grenzwerte der komplexen Folgen mit den Gliedern

$$\text{(a)} \quad a_n = 2 + \frac{4i^n}{n} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2}i\right)^n\,, \qquad \text{(b)} \quad b_n = \frac{n^3 + (in^2+1)(6+in)}{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} ik^2}\,, \qquad n \in \mathbb{N}\,.$$

Aufgabe 20: Gegeben sei die reelle Folge $(a_n)_n$ mit den Folgengliedern

$$a_n = \frac{1}{2} + (-1)^n\left(1 - \frac{1}{n}\right)\,, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Ist die Folge beschränkt? Falls ja, geben Sie das kleinstmögliche r an mit $|a_n| \leq r$. Begründen Sie Ihre Antwort.

Abgabetermin: Montag, den 19.11.2012, 12:00 Uhr, in den Abgabekästen bei Seminarraum Z1 im Gebäude 01.85 (Fritz-Erler-Str. 1-3).

4. Tutorium
zur Vorlesung Höhere Mathematik I für
biw/ciw/mach/mage/vt

Aufgabe T13: Gegeben sei die Folge $(a_n)_n$ mit den Gliedern $a_n = \frac{n-1}{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$. Beweisen Sie zunächst, dass die Folge nach oben beschränkt ist. Bestimmen Sie nun einen Folgenindex N derart, dass $|a_n - 1| < \varepsilon$ für alle $n \geq N$, wenn

(a) $\varepsilon = \dfrac{1}{10}$, (b) $\varepsilon = \dfrac{1}{1000}$, (c) $\varepsilon > 0$ beliebig ist.

Konvergiert die Folge $(a_n)_n$? Falls ja, was ist ihr Grenzwert?

Aufgabe T14: Berechnen Sie unter Verwendung der Limesregeln die Grenzwerte der Folgen mit den Gliedern

(a) $a_n = \dfrac{1+n+n^2}{n(n+1)}$,

(b) $b_n = \sqrt[n]{a^n + b^n}$, $0 \leq a \leq b$,

(c) $c_n = \sqrt{n^2 + an + b} - n$, $a, b \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$ hinreichend groß,

(d) $d_n = \left(\sqrt{n^2+1} - n\right)(n+7)$.

Aufgabe T15: Berechnen Sie die Grenzwerte der komplexen Folgen, die explizit definiert sind durch:

(a) $a_n = \dfrac{2+i^n}{4+n}$, (b) $b_n = \dfrac{(5n+i)(ni+3)}{(1+i)^n}$, (c) $c_n = \dfrac{2(-6)^n i^n + 2^n}{5(-6)^{n+1} i^n + 3^n}$, $n \in \mathbb{N}$.

Alle aktuellen Informationen zur Veranstaltung finden Sie auf der Internetseite unter:
`www.math.kit.edu/iag1/lehre/hm1mach2012w/`

Tutorien: Dienstag, den 13.11.2012, bis Donnerstag, den 15.11.2012.