

21	22	23	24	25	Σ

Gruppe

Karlsruhe, den 15.11.2012

Matrikel-Nr.:

Matrikel-Nr.:

Matrikel-Nr.:

5. Übungsblatt zur Vorlesung Höhere Mathematik I für biw/ciw/mach/mage/vt

Aufgabe 21: Bestimmen Sie alle Häufungspunkte der (komplexen) Folgen mit den Gliedern

(a) $a_n = \frac{1}{n} + 2(-1)^n$, (b) $b_n = \left(\frac{5n+7}{n}\right) i^n, n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 22: Untersuchen Sie die Folgen, deren Glieder unten für $n \in \mathbb{N}$ angegeben sind, auf Beschränktheit, Monotonie und Konvergenz bzw. Beschränktheit, Monotonie und Konvergenz geeigneter Teilfolgen. Der Grenzwert oder die Häufungspunkte müssen nicht angegeben werden.

(a) $a_n = \frac{1+6n+2n^2}{(n+3)n}$, (c) $c_n = \frac{(-2)^{-n}+1}{1+2n} - 1 + \frac{2n}{1+2n}$,
 (b) $b_n = 6 - \frac{6+n^2}{n}$, (d) $d_n = \frac{1+2^n}{1+2^n+(-2)^n}$.

Aufgabe 23: Für $a \in \mathbb{R}_{>0}$ sei die Zahlenfolge $(x_n)_n$ folgendermaßen rekursiv definiert

$$x_{n+1} = 2x_n - ax_n^2, \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

für $0 < x_0 < \frac{1}{a}$ beliebig.

- (a) Zeigen Sie, dass $x_{n+1} \leq \frac{1}{a}$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt. (Hinweis: quadratische Ergänzung).
- (b) Zeigen Sie mit vollständiger Induktion: $x_n \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$. (Hinweis: Teil (a) verwenden.)
- (c) Begründen Sie, dass $(x_n)_n$ konvergiert, und bestimmen Sie $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

Aufgabe 24: Wir betrachten die rekursiv definierte Folge mit zwei möglichen Startwerten $b = -\frac{1}{4}$ oder $b = \frac{1}{4}$:

$$a_1 = b, \quad a_{k+1} = \frac{|a_k|}{2a_k - 1}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

- (a) Unter Annahme der Konvergenz, gegen welche Grenzwerte kann die Folge dann konvergieren?
- (b) Für welche der beiden Startwerte ist die Folge monoton?
- (c) Für welche der beiden Startwerte ist die Folge beschränkt?
- (d) Begründen Sie, ob die Folgen konvergieren und bestimmen Sie ggf. die Grenzwerte.

Aufgabe 25: Ein Student lernt pro Tag drei HM1-Skriptseiten auswendig. Über die Nacht vergisst er 4% des insgesamt gelernten Wissens. Gehen Sie davon aus, dass das Skript unendlich viele Seiten hat und die Testperson am ersten Semestertag über kein HM-Wissen verfügt. Also nicht mal die pq -Formel!

- (a) Geben Sie eine (rekursive) Formel für den Wissensinhalt w_n (gemessen in Seiten) der Testperson nach Ablauf von n Tagen und n Nächten.
- (b) Zeigen Sie, dass die Folge $(w_n)_n$ monoton steigt.
- (c) Zeigen Sie, dass $(w_n)_n$ durch 75 Seiten nach oben beschränkt ist.
- (d) Welche Wissensmenge wird sich nach einiger Zeit etwa eingestellt haben? (Grenzwert)

5. Tutorium
zur Vorlesung Höhere Mathematik I für
biw/ciw/mach/mage/vt

Aufgabe T13: Welche der folgenden Aussagen sind zutreffend?

- (a) Eine Folge konvergiert, wenn sie monoton und beschränkt ist.
- (b) Wenn eine Folge konvergiert, ist sie monoton und beschränkt.
- (c) Wenn eine Folge nicht beschränkt ist, kann sie nicht konvergieren.
- (d) Wenn eine Folge nicht monoton ist, kann sie nicht konvergieren.
- (e) Wenn eine Folge genau einen Häufungspunkt hat, konvergiert sie.
- (f) Wenn eine Folge konvergiert, hat sie genau einen Häufungspunkt.

Aufgabe T14: Untersuchen Sie die Folgen, deren Glieder im Folgenden beschrieben sind, auf Beschränktheit, Monotonie und Konvergenz (der Grenzwert muss nicht angegeben werden).

$$(a) \quad a_n = \frac{1+n+n^2}{n(n+1)} \quad , \quad (b) \quad b_n = \frac{1+n+n^2}{n+1} \quad ,$$
$$(c) \quad c_n = \frac{1}{1+(-2)^n} \quad , \quad (d) \quad d_n = \frac{1+(-2)^n}{1+2^n} \quad .$$

Aufgabe T15: Die reelle Folge (a_k) sei definiert durch

$$a_1 = 1, \quad a_{k+1} = \frac{a_k}{1 + \sqrt{1 + a_k^2}}, \quad k = 1, 2, \dots$$

- (a) Zeigen Sie, dass die Folge konvergiert und berechnen Sie ihren Grenzwert.
- (b) Zeigen Sie, dass auch die Folge (b_k) mit $b_k = 2^k a_k$, $k = 1, 2, \dots$ konvergiert.

Aufgabe T16: Gegeben sei eine rekursiv definierte Folge durch die Vorschrift

$$a_{n+1} = a_n^2 + \frac{1}{4}, \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

- (a) Zeigen Sie, dass die Folge für $0 \leq a_0 \leq \frac{1}{2}$ konvergiert und berechnen Sie ihren Grenzwert.
- (b) Zeigen Sie, dass die Folge für $a_0 > \frac{1}{2}$ divergiert (Hinweis: Zeigen Sie $a_n \geq a_0 + nd$ mit $d = (a_0 - 1/2)^2$).
- (c) Was passiert für $a_0 < 0$?

Alle aktuellen Informationen zur Veranstaltung finden Sie auf der Internetseite unter:
www.math.kit.edu/iag1/lehre/hm1mach2012w/