Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Algebra und Geometrie
PD Dr. F. Hettlich
Dr. M. J. Krause
Dipl.-Math. J. Stompe

31	32	33	34	35	$\sum$

Gruppe

Karlsruhe, den 29.11.2012

Matrikel-Nr.: ....

Matrikel-Nr.: ....

Matrikel-Nr.: ....

7. Übungsblatt
zur Vorlesung Höhere Mathematik I für
biw/ciw/mach/mage/vt

Aufgabe 31: Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz:

$$\text{(a)}\quad \left(\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{3+4i}{6}\right)^n\right),\quad \text{(b)}\quad \left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2(n+1)^2}{n!}\right),\quad \text{(c)}\quad \left(\sum_{n=8}^{\infty}\frac{n+7\sqrt{n}}{n^3-n}\right).$$

Aufgabe 32: Berechnen Sie jeweils die ersten vier Partialsummen s_1, s_2, s_3 und s_4 und untersuchen Sie die Reihen auf Konvergenz:

$$\text{(a)}\quad \left(\sum_{\nu=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\nu(\nu+1)}-\frac{4}{\nu}\right)\right),\quad \text{(b)}\quad \left(\sum_{\nu=1}^{\infty}(-1)^{\nu}\frac{2\nu+1}{\nu(\nu+1)}\right).$$

Aufgabe 33: Zeigen Sie, dass die Reihe $\left(\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{k+1}{2^k}\right)$ absolut konvergiert. Beweisen Sie anschließend für die Partialsummen s_n der Reihe durch vollständige Induktion die Darstellung

$$s_n=\frac{1}{9}\left(4+(-1)^n\frac{3n+5}{2^n}\right),\qquad n=0,1,2,\ldots,$$

und nutzen Sie dieses Resultat zur Gewinnung des Grenzwerts s der Reihe.

Aufgabe 34: Bestimmen Sie alle $\alpha\in\mathbb{R}$, für welche die folgende Reihe konvergiert:

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\left(\frac{\alpha-1}{\alpha+1}\right)^k\right)\ .$$

Hinweis: Untersuchen Sie zunächst die Reihe $\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}z^k\right)$ für $z\in\mathbb{R}$ auf Konvergenz.

Aufgabe 35: Der Turm von Babylon werde durch Aufeinanderstapeln von Würfeln W_n der Kantenlänge $\frac{1}{n}$ Meter nachgebaut, wobei $n=1,2,3,\ldots$ ist. Die Bodenfläche des $(n+1)$-ten Würfels werde dabei auf die Mitte der Dachfläche des n-ten Würfels gesetzt.

(a) Wie hoch wird der Turm?

(b) Kann der Turm mit endlich viel Farbe angestrichen werden?

(c) Kommen die Baumeister mit endlich viel Beton aus, wenn jeder Würfel ganz aus Beton besteht?

Abgabetermin: Montag, den 10.12.2012, 12:00 Uhr, in den Abgabekästen bei Seminarraum Z1 im Gebäude 01.85 (Fritz-Erler-Str. 1-3).

7. Tutorium
zur Vorlesung Höhere Mathematik I für
biw/ciw/mach/mage/vt

Aufgabe T20: Untersuchen Sie die Konvergenz der Reihe (a) mit dem Quotientenkriterium und der Reihen (b), (c) mit dem Wurzelkriterium:

$$\text{(a)}\ \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k 3^k}{k!(2k+1)}\right), \quad \text{(b)}\ \left(\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{9}{10}+\frac{1}{k}\right)^k\right), \quad \text{(c)}\ \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{4^k(1+2k)^k(1-k)^k}{(3+k)^{2k}2^k}\right).$$

Aufgabe T21: Gegeben sei die Reihe $\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right)$ mit

$$a_n = \begin{cases} \dfrac{-1}{2^n} & \text{für } n \text{ gerade} \\ \dfrac{1}{4^n} & \text{für } n \text{ ungerade} \end{cases}$$

(a) Zeigen Sie mit dem Majorantenkriterium die absolute Konvergenz der Reihe.

(b) Zeigen Sie: Das Wurzelkriterium liefert auch die absolute Konvergenz der Reihe; mit dem Quotientenkriterium ist keine Aussage möglich.

(c) Schreiben Sie die Reihe als Summe von zwei geeigneten Reihen und berechnen Sie damit ihren Wert.

Aufgabe T22: Beweisen Sie die Konvergenz der Reihe $\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-n)^n}{(n+1)^{n+1}}\right)$ mittels des Kriteriums von Leibniz.

Hinweis: Verwenden Sie, dass die Folge $\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)_n$ streng monoton steigend ist. Siehe Beispiel 2.21 (b) im HM1-Skript.

Alle aktuellen Informationen zur Veranstaltung finden Sie auf der Internetseite unter:
`www.math.kit.edu/iag1/lehre/hm1mach2012w/`

Tutorien: Dienstag, den 4.12.2012, bis Donnerstag, den 6.12.2012.