Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Algebra und Geometrie
PD Dr. F. Hettlich
Dr. M. J. Krause
Dipl.-Math. J. Stompe

36	37	38	39	40	$\sum$

Gruppe

Karlsruhe, den 6.12.2012

Matrikel-Nr.: ....

Matrikel-Nr.: ....

Matrikel-Nr.: ....

8. Übungsblatt
zur Vorlesung Höhere Mathematik I für
biw/ciw/mach/mage/vt

Aufgabe 36: Gegeben sei das Polynom $f(x) = x^4 + 5x^3 - 8x^2 + 1 - (x-2)^3$.

(a) Entwickeln Sie f jeweils um die Entwicklungspunkte $x_1 = 1$ und $x_2 = -1$.

(b) Stellen Sie das Polynom als Produkt von Linearfaktoren dar. Was schließen Sie für das Verhalten von f auf den Intervallen $[1,\infty)$ und $(-\infty,-3]$?

Aufgabe 37: Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Potenzreihen:

$$\text{(a)}\ \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k+2}{2^k} x^k\right), \qquad \text{(b)}\ \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2+x)^{2k}}{(2+\frac{1}{k})^k}\right), \qquad \text{(c)}\ \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{3^{k+2}}{2^k} x^k\right).$$

Aufgabe 38: Für die Funktionen cosh, sinh gilt

$$\cosh(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}), \qquad \sinh(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}),\ x \in \mathbb{R} \qquad \text{mit } e^x := \exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}.$$

(a) Beweisen Sie die Identität $\cosh(2x) = [\cosh(x)]^2 + [\sinh(x)]^2$ mittels Cauchy Produkt.

(b) Läßt sich die Identität kürzer nachweisen?

(c) Bestimmen Sie die Potenzreihe für $f(x) = [\cosh(x)]^2 - [\sinh(x)]^2$ um den Entwicklungspunkt $x_0 = 0$.

Aufgabe 39: Gesucht ist die Potenzreihe $\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\,(x-x_0)^n\right)$ um $x_0 \in \mathbb{R}$ zu der Funktion $f(x) = \dfrac{e^{(x-x_0)}}{1-(x-x_0)}$ mit $x \in \mathbb{R} \setminus \{1+x_0\}$.

(a) Zeigen Sie $a_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$. (b) Für welche $x \in \mathbb{R}$ konvergiert die Potenzreihe?

Aufgabe 40: Der vom Rheuma geplagte Weihnachtsmann hat vom vielen Schnee die Nase voll. Da er nicht von einer baldigen Frühpensionierung ausgehen kann, verlegt er seinen Wohnsitz vom Nordpol auf die Malediven und beschließt, in Zukunft nur noch dort Geschenke auszutragen, wo die Gesamtmenge Schnee in den kommenden Jahren beschränkt ist. Die Meteorolügner des Weihnachtsmannes prognostizieren aufgrund des Klimawandels die Schneemenge im Jahr $2000+n$ proportional zu

$$a_n(x) := \frac{2^n x^{2n}}{(1+\frac{1}{n})^n},$$

wobei $x \in \mathbb{R}$ die Entfernung des Ortes vom Äquator in 10.000 km bezeichnet.

(a) Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Reihe $\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x)\right)$.

(b) Wird der Weihnachtsmann in Zukunft in Karlsruhe noch Geschenke verteilen?
Hinweis: Karlsruhe liegt auf dem 49. Breitengrad, der Erdumfang beträgt 40.000 km.

Abgabetermin: Montag, den 17.12.2012, 12:00 Uhr, in den Abgabekästen bei Seminarraum Z1 im Gebäude 01.85 (Fritz-Erler-Str. 1-3).

8. Tutorium
zur Vorlesung Höhere Mathematik I für
biw/ciw/mach/mage/vt

Aufgabe T23: Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch $f(x) = \frac{1}{8}\,x^3 + \frac{3}{8}\,x^2 - \frac{9}{8}\,x + \frac{5}{8}$. Entwickeln Sie f jeweils um die Entwicklungspunkte $x_1 = 1$ und $x_2 = 3$. Was schließen Sie für das Verhalten von f auf den Intervallen $[-5, \infty)$ und $(-\infty, 3]$?

Aufgabe T24: Bestimmen Sie für $z \in \mathbb{C}$ den Konvergenzradius der Potenzreihen:

$$\text{(a)} \quad \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{3(k+2)!}\right), \qquad \text{(b)} \quad \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^{2k} \cdot 2^k}{(1+\frac{1}{k})^k}\right), \qquad \text{(c)} \quad \left(\sum_{k=0}^{\infty} k^k z^k\right).$$

Aufgabe T25:

(a) Berechnen Sie die Potenzreihe der rationalen Funktion $f : \mathbb{C} \setminus \{1\} \to \mathbb{C}$ mit $f(z) = \frac{1+z^2}{1-z}$ im Entwicklungspunkt $z_0 = 0$.

(b) Berechnen Sie den Konvergenzradius der Reihe.

(c) Für welche $z \in \mathbb{C}$ konvergiert die Potenzreihe?

Alle aktuellen Informationen zur Veranstaltung finden Sie auf der Internetseite unter:
`www.math.kit.edu/iag1/lehre/hm1mach2012w/`

Tutorien: Dienstag, den 11.12.2012, bis Donnerstag, den 13.12.2012.