3. Aufgabe: Bestimmen Sie eine Lsg. y_1 der DGL

$$4x^2 y''(x) + y(x) = 0, \quad x > 0.$$

mit einem verallgemeinerten Potenzreihenansatz.

<u>Lösung</u>: Der Ansatz ist $y_1(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+\alpha}$ mit $a_0 \neq 0$ und $\alpha \notin \mathbb{N}_0$.
($a_0 \neq 0$ ist keine Einschränkung, da man dies immer durch Indexverschiebung erreichen kann) ($\alpha \notin \mathbb{N}_0$, da ansonsten wir eine "gewöhnliche" PR hätten.)
Die Ableitungen:

$$y_1'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (k+\alpha) x^{k+\alpha-1} \quad \text{und} \quad y_1''(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (k+\alpha)(k+\alpha-1) x^{k+\alpha-2}.$$

Eingesetzt in die DGL ergibt:

$$\underbrace{4x^2 \sum_{k=0}^{\infty} a_k (k+\alpha)(k+\alpha-1) x^{k+\alpha-2}}_{y''} + \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+\alpha}}_{y} \stackrel{!}{=} 0.$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} 4a_k (k+\alpha)(k+\alpha-1) x^{k+\alpha} + \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+\alpha} \stackrel{!}{=} 0$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \left(4(k+\alpha)(k+\alpha-1)+1\right) x^{k+\alpha} \stackrel{!}{=} 0.$$

$\Rightarrow$ Es muss gelten: $a_k \left(4(k+\alpha)(k+\alpha-1)+1\right) = 0$ für alle k.
Da wir $a_0 \neq 0$ gefordert hatten, muss für $k=0$ gelten:

$$4(k+\alpha)(k+\alpha-1)+1 = 4(\alpha-1)\alpha+1 = 4\alpha^2-4\alpha+1 = 4(\alpha-\tfrac{1}{2})^2 \stackrel{!}{=} 0.$$

Also ist $\alpha = 1/2$. Für $k > 0$ ergibt sich daraus die Bedingung:

$$4(k+\tfrac{1}{2})(k-\tfrac{1}{2})+1)a_k = (4k^2-1+1)a_k = 4k^2 a_k \stackrel{!}{=} 0,$$

die nur erfüllt ist, wenn alle $a_k = 0$ sind für $k > 0$.
Also bricht die Reihe ab und wir erhalten

$$\underline{y_1(x) = a_0 x^{0+1/2} = a_0 \sqrt{x}, \quad x > 0.}$$

(Beachte, dass die allg. Lsg obiger DGL folg. Struktur aufweist:

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2.$$

Wie würde man y_2 bestimmen? $\to$ z.B. Reduktion der Ordnung.)