Gruppe

Universität Karlsruhe (TH)
Institut für Algebra und Geometrie
Dr. T. Arens
Dipl.-Math.techn. A. Schkarbanenko
M.Sc. S. Geninska

6	7	8	9	10	$\sum$

Karlsruhe, den 21.04.2008

Matrikel-Nr.: ....

Matrikel-Nr.: ....

2. Übungsblatt zur Vorlesung Höhere Mathematik II für biw/ciw/mach/mage/vt

Aufgabe 6: Bestimmen Sie die allgemeine Lösung folgender Differentialgleichungen:

$$\text{(a) } y'(x) = \tfrac{1}{1+x^2}, \qquad \text{(b) } y'(x) = x^2 y(x), \qquad \text{(c) } y'(x) = \tfrac{x}{y^2(x)\sqrt{1+x^2}}, \qquad \text{(d) } y'(x) = 1 + \tfrac{y^2(x)}{x^2+xy(x)}.$$

Hinweis zu (d): Verwenden Sie die Substitution $z(x) = \frac{y(x)}{x}$. Es reicht, wenn Sie die Lösung in impliziter Form angeben.

Aufgabe 7: Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichungen:

(a) $y'(x) - e^{-x} + y(x) - x\,y'(x) = x\,y(x)$,

(b) $y'(x) + y(x) = x\,y^3(x)$.

Aufgabe 8: Bestimmen Sie die Lösungen der folgenden Anfangswertaufgaben:

(a) $y'(x) = \dfrac{1}{1-x} y(x) + x - 1, \quad x > 1, \quad y(2) = 0,$

(b) $y^3(x) - x^2 + xy^2(x)y'(x) = 0, \quad x > 0, \quad y(1) = 1,$

(c) $y'(x) = \sqrt{1 - y^2(x)}, \quad y(0) = \dfrac{1}{2}.$

Aufgabe 9: Zeigen Sie, dass das folgende Anfangswertproblem unendlich viele Lösungen hat:

$$y'(x) = \sqrt{y(x)}, \quad y(0) = 0.$$

Hinweis: Kombinieren Sie die triviale Lösung und die allgemeine Lösung, die durch Trennung der Veränderlichen erhalten wird.

Aufgabe 10: Bestimmen Sie alle stetig differenzierbaren Funktionen $y : \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$ mit folgender Eigenschaft: Die Tangente an y im Punkt $(x_0, y(x_0))$ schneidet die y-Achse im Punkt $(0, -\frac{y(x_0)^3}{x_0^2})$.

Abgabetermin: Dienstag, den 29.04.2008, 12:30 Uhr, in den Fächern bei Zimmer 208.1 im Mathematikgebäude.

1. Tutorium
zur Vorlesung Höhere Mathematik II für
biw/ciw/mach/mage/vt

Aufgabe T1: Bestimmen Sie die allgemeine Lösung folgender Differentialgleichungen:

(a) $y'(x) = \dfrac{2^x}{y(x)}$ (b) $y'(x) - 1 = y(x)x - y(x) - x$ (c) $y'(x) = \dfrac{y^2(x) + 1}{x^2 + 6x + 10}$

Aufgabe T2: Bestimmen Sie den Typ und die Lösungen der folgenden Anfangswertprobleme:

(a) $y'(x) = 2\frac{y(x)}{x}$ mit $y(1) = 2$,

(b) $y'(x) = 2\frac{y(x)}{x} + x$ mit $y(1) = 2$,

(c) $y'(x) = \frac{y(x)}{x} + \frac{x}{2y(x)}$ mit $y(1) = \sqrt{2}$.

Aufgabe T3: Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$y'(x) + y(x) - y^3(x) = 0, \quad y(0) = \frac{1}{2}.$$

Aufgabe T4: Zeigen Sie, dass jede Lösung einer autonomen Differentialgleichung $u'(x) = h(u(x))$ translationsinvariant ist, d.h. mit $u(x)$ ist auch $v(x) := u(x + a)$ mit $a \in \mathbb{R}$ eine Lösung. Lösen Sie die Differentialgleichung für den Fall $h(u) = u(u - 1)$.

Hinweis: $\frac{1}{z(z-1)} = \frac{1}{z-1} - \frac{1}{z}$.

Tutorien: Dienstag, den 22.04.2008, bis Donnerstag, den 24.04.2008.