| |
|---|
| Gruppe |

Universität Karlsruhe (TH)
Institut für Algebra und Geometrie
Dr. T. Arens
Dipl.-Math.techn. A. Schkarbanenko
M.Sc. S. Geninska

| 46 | 47 | 48 | 49 | 50 | $\sum$ |
|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | |

Karlsruhe, den 16.06.2008

Matrikel-Nr.: ..................

Matrikel-Nr.: ..................

# 10. Übungsblatt zur Vorlesung Höhere Mathematik II für biw/ciw/mach/mage/vt

**Aufgabe 46:** Berechnen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 2 & 2a \end{pmatrix}$ mit $a \in \mathbb{R}$.

**Aufgabe 47:** Gegeben Sei die folgende Differentialgleichung

$$u'''(x) - u''(x) + 4u'(x) - 4u(x) = 0.$$

Formen Sie die Differentialgleichung in ein äquivalentes System erster Ordnung um. Aus der allgemeinen Lösung des Systems in komplexer, bzw. in reeller Form, bestimmen Sie die allgemeine Lösung der ursprünglichen Differentialgleichung in komplexer, bzw. reeller Form.

**Aufgabe 48:** Gegeben sei das lineare Differentialgleichungssystem

$$x'(t) = Ax(t) \quad \text{für} \quad A = \begin{pmatrix} 8 & -1 \\ 4 & 12 \end{pmatrix}.$$

(a) Welche der folgenden Funktionen sind Lösungen des Differentialgleichungssystems:

$$x_1(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} e^{10t}, \qquad x_2(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} te^{10t} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} e^{10t}, \qquad x_3(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} te^{10t},$$

$$x_4(t) = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{10t}, \qquad x_5(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} te^{10t} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{10t}?$$

(b) Bestimmen Sie mit Hilfe der Wronskideterminante, welche der Lösungen ein Fundamentalsystem bilden.

**Aufgabe 49:** Gegeben sei die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 5 & 6 \\ 0 & -3 & -4 \end{pmatrix}$.

(a) Berechnen Sie die Eigenwerte von $A$ und eine Basis $\{v^1, v^2, v^3\}$ von $\mathbb{R}^3$, die aus Eigenvektoren besteht.

(b) Sei $P$ die Matrix mit Spalten $v^1$, $v^2$ und $v^3$. Zeigen Sie, dass die Matrix $D := P^{-1}AP$ von der Form $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$ ist, wobei $\lambda_1$, $\lambda_2$, $\lambda_3$ die Eigenwerte von $A$ sind.

**Aufgabe 50:** (a) Berechnen Sie die Eigenwerte von $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 4 \\ 0 & -6 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

(b) Sei $p(x) = c_3x^3 + c_2x^2 + c_1x + c_0$ das charakteristische Polynom von $A$. Zeigen Sie, dass $p(A) = 0$, d.h. $c_3A^3 + c_2A^2 + c_1A + c_0I_3 = 0$. (Das gilt auch allgemein für jede quadratische Matrix und ihr charakteristisches Polynom!)

(c) Bestimmen Sie aus $p(A) = 0$ die inverse Matrix $A^{-1}$.

**Abgabetermin:** Dienstag, den 24.06.2008, 12:30 Uhr, in den Fächern bei Zimmer 208.1 im Mathematikgebäude.

# 9. Tutorium
# zur Vorlesung Höhere Mathematik II für biw/ciw/mach/mage/vt

**Aufgabe T33:** Bestimmen Sie alle Eigenwerte der quadratischen Matrix

$$\text{(a)} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \text{(b)} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix},$$

sowie zu den reellen Eigenwerten $\lambda$ einen Eigenvektor $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$ gemäß $Au = \lambda u$.

**Aufgabe T34:** Sei $\{u^1, u^2\}$ ein Fundamentalsystem eines Differentialgleichungssystems $u'(x) = A(x)u(x)$ und $v$ eine weitere Lösung.

(a) Welche Dimension muss die Matrix $A(x)$ haben?

(b) Ist $\{u^1, u^2, v\}$ bzw. $\{u^1 + u^2, u^1 - u^2\}$ ein Fundamentalsystem?

**Aufgabe T35:** Lösen Sie das Anfangswertproblem für das lineare Differentialgleichungssystem

$$u'(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} u(x), \quad u(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

**Aufgabe T36:** Gegeben sei das lineare Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} u_1'(x) &= \phantom{u_1(x)} - 2u_2(x), \\ u_2'(x) &= u_1(x) + 2u_2(x). \end{aligned}$$

(a) Bestimmen Sie die allgemeine (komplexe) Lösung.

(b) Bestimmen Sie die reelle Darstellung der Lösung mit den Anfangswerten

$$u_1(0) = 0, \quad u_2(0) = 1.$$

**Tutorien:** Dienstag, den 17.06.2008, bis Donnerstag, den 19.06.2008.