Laplace-Transformation
Übersicht

- Funktionaltransformationen
  - → Integraltransformationen
    - → Laplace-Trafo (kann als Verallgemeinerung der Fourier-Trafo aufgefasst werden; Pierre-Simon Laplace 1749-1827 franz. Mathematiker)
    - → Fourier-Trafo (lebt auf einer (manchmal) kleineren Menge als $\mathcal{L}$-Trafo)
    - → z-Trafo (Bei zeitdiskreten Systemen führt $\mathcal{L}$-Trafo zu z-Trafo)
    - → Radon-Trafo (1917) (Grundlage der heutigen Computertomographie)
    - → Mellin-, Hankel-, Hilbert-Trafo, ...

- Laplace-Trafo: ausgesprochen wirkungsvolles Verfahren zur Lösung vieler Problemstellungen der math. Physik und der theor. Elektrotechnik, welche durch lineare Anfangs- und Randwertprobleme beschrieben werden.

- Wichtige Eigenschaften der $\mathcal{L}$-Trafo:
  - der Differentiation und Integration im Urbildraum entsprechen einfache algebraische Operationen im Bildraum.

- Untersuchung der Bildfkt. liefert häufig bessere physikalische Einblicke in das Verhalten lin. Systeme gegenüber Studien im Zeitbereich.

Laplace-Transformation

$$\mathcal{L}f(s) = \int_0^\infty f(t)\, e^{-st}\, dt\,, \quad s \in [0,\infty)$$

Urbildraum

$f(t)$ Originalfktion

- $\mathcal{E}$ (Fkten von exp-Typ)

$\mathcal{L}$-Trafo

"injektiv" (Satz 4.14)

Bildraum

$\mathcal{L}f(s) = F(s)$ Bildfktion

- bel. oft db. (Satz 4.10)
- $\lim\limits_{s\to\infty} \mathcal{L}f(s) = 0$ (Satz 4.9)
- $\mathcal{L}f(s)$ ist auf (α,∞) stetig (Satz 4.9)

Parsevalsche Glg. (kommt in HM3)

Anwendung

Urbildraum

- Anfangswertaufgaben
  - lin. DGLen
  - lin. DGL-System
- manche Integro-diffglgen (Bsp. 4.20 b)

$\mathcal{L}$-Trafo

direkt transf. oder mit Tabelle

Bildraum

algebraische Glg

einfaches Auflösen

$\mathcal{L}f(s)$

Rücktrafo

Hauptsächlich mit Tabelle (PBZ)

?

Lösung $f(t)$

<u>Bemerkung:</u> Die $\mathcal{L}$-Trafo eignet sich nicht immer als Lösungsmethode! Angewandt z.B. auf eine Eulersche DGL erhällt man keine algebraische Glg! Siehe Tutorienaufg. (43 b).

12. Übung

1. Aufgabe: Bestimmen Sie die Laplace-Transformierte von:

(a) $f(t) = (e^{2t} + e^{3t}) \cdot \sin(4t), \quad t \geq 0,$

(b) $g(t) = \cos(t) - t\sin(t), \quad t \geq 0,$

(c) $h(t) = \int_0^t \frac{e^{\tau} - 1}{\tau}\, d\tau, \quad t \geq 0,$

(d) $k(t) = |\sin(t)|, \quad t \geq 0.$

2. Aufgabe: Löse das Anfangswertproblem

$$y''(t) + y(t) = 0, \quad y(0) = A, \quad y'(0) = B, \quad t \geq 0$$

mit Hilfe der Laplace-Transformation.

3. Aufgabe: Bestimmen Sie die Lsg. des AWPs:

$$u'(t) - 6u(t) + 3v(t) = 8e^t$$

$$v'(t) - 2u(t) - v(t) = 4e^t,$$

$$u(0) = -1, \quad v(0) = 0, \quad t \geq 0.$$