Universität Karlsruhe (TH)
Institut für Algebra und Geometrie
PD Dr. F. Hettlich
Dipl.-Math. K. Kremer
Dipl.-Math.techn. S. Ritterbusch

46	47	48	49	50	$\sum$

Gruppe

Karlsruhe, den 23.6.2009

Matrikel-Nr.: ....

Matrikel-Nr.: ....

10. Übungsblatt
zur Vorlesung Höhere Mathematik II für
biw/ciw/mach/mage/vt

Aufgabe 46: Berechnen Sie die Laplace-Transformierten zu:

(a) $f(x) = x^2 + 3x + 4 + x^2\sin(2x)$ (b) $f(x) = \begin{cases} \sin(x) & 0 \leq x < \pi \\ \cos(x) & x \geq \pi \end{cases}$

(c) $f(x) = (e^{2x} + e^{3x}) \cdot \sin(4x)$ (d) $f(x) = \cos(x) - x\sin(x) = (x \cdot \cos(x))'$

(e) $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$

Verwenden Sie in (e) die Definition der Laplace-Transformation und vollständige Induktion.

Aufgabe 47: Welche Originalfunktion $f(t)$, $t \in [0, \infty)$, liegt bei der Laplace-Transformation der Bildfunktion

$$\text{(a)}\quad F(s) = \frac{2s}{s^4 + 2s^3 + 2s^2 + 2s + 1}\,, \qquad \text{(b)}\quad F(s) = \operatorname{arccot}(s-1)\,, \qquad \text{(c)}\quad F(s) = \frac{e^{-\pi s}}{\sqrt{s^2+1}}$$

zugrunde?

Hinweis: Bei (a) führe man eine Partialbruchzerlegung durch, bei (b) und (c) beziehe man sich auf geeignete Sätze zur Laplace-Transformation.

Aufgabe 48: Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$y'''(x) + 4y''(x) + 5y'(x) + 2y(x) = x, \quad y(0) = 0,\ y'(0) = 1,\ y''(0) = -1\,.$$

durch Laplace-Transformation.

Aufgabe 49: Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$y'(x) = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} y(x), \quad y(0) = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad x \geq 0,$$

mittels Laplace-Transformation.

Aufgabe 50: Sei der Vektorraum $C[0,1]$ und dessen Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ definiert wie in Aufgabe 10 von Blatt 2. Die Funktionen $v_j(x) = \sin(\pi j x)$ für $j = 1, \dots, n$ spannen einen Unterraum U von $C[0,1]$ auf. Es gilt $v_j \perp v_k$ für $j \neq k$. Sei $u = \sum_{j=1}^n a_j v_j \in U$ (mit $a_j \in \mathbb{R}$) eine Funktion, die $\langle u'' - u, v \rangle = \langle f, v \rangle$ mit $f(x) = x$ für alle $v \in U$ erfüllt.

(a) Zeigen Sie $\langle u'' - u, v_k \rangle = -\frac{1}{2} a_k (\pi^2 k^2 + 1)$ für $k = 1, \dots, n$.

(b) Zeigen Sie $\langle f, v_k \rangle = \dfrac{(-1)^{k+1}}{\pi k}$ für $k = 1, \dots, n$.

(c) Bestimmen Sie die Koeffizienten a_k und geben Sie die Näherungslösung u für $n = 3$ an.

Anmerkung: Wäre $U = C[0,1]$, so würde man die Differentialgleichung $u''(x) - u(x) = f(x)$ lösen. Die Einschränkung auf $U \subsetneq C[0,1]$ liefert eine Näherungslösung für das Randwertproblem $u(0) = u(1) = 0$. Dieses Verfahren nennt man in der Mathematik das *Galerkin-Verfahren*. Es wird insbesondere bei der *Finite-Elemente-Methode* verwendet.

Abgabetermin: Mittwoch, den 1.07.2009, 12:30 Uhr, in den Fächern bei Zimmer 208.1 im Mathematikgebäude (20.30).

10. Tutorium
zur Vorlesung Höhere Mathematik II für
biw/ciw/mach/mage/vt

Aufgabe T37: Berechnen Sie die Laplace-Transformierten der Funktionen

(a) $f(t) = \cosh(t)$ (b)$f(t) = t\cosh(t)$ (b) $f(t) = \sinh(\omega t)$ (d) $f(t) = \cos^2(\omega t), \quad \omega > 0.$

Aufgabe T38: Welche Funktionen wurden hier Laplace-transformiert?

(a) $F(s) = \dfrac{1}{s^5}$, (b) $F(s) = \dfrac{6}{(s-2)^4}$, (c) $F(s) = \dfrac{1}{s(s+1)^2}$, (d) $F(s) = \dfrac{2s}{(s+1)^2(s^2+1)}$.

Aufgabe T39:

(a) Bestimmen Sie $\mathcal{L}((3-t^2)\sin t - 3t\cos t)(s)$.

(b) Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$u^{(4)}(t) + 2u''(t) + u(t) = \sin t, \quad u(0) = u'(0) = u''(0) = u'''(0) = 0.$$

Aufgabe T40: Lösen Sie mit der Laplace-Transformation das Anfangswertproblem:

$$\begin{aligned} x'(t) &= 2y(t) + 1 \\ y'(t) &= -2x(t) + 2t \end{aligned}$$

$$x(0) = 0,\ y(0) = 1$$

Tutorien: Donnerstag, den 25.6.2009, bis Montag, den 29.6.2009.