

51	52	53	54	55	Σ

Gruppe

Karlsruhe, den 30.6.2009

Matrikel-Nr.:

Matrikel-Nr.:

11. Übungsblatt zur Vorlesung Höhere Mathematik II für biw/ciw/mach/mage/vt

Aufgabe 51: Gegeben seien die Funktionen

$$h(t-a) = \begin{cases} 0, & t < a \\ 1, & t \geq a \end{cases} \quad \text{und} \quad f(t) = \begin{cases} t-1, & 1 \leq t < 3, \\ 8-2t, & 3 \leq t < 4, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

- (a) Mit Hilfe der Einheitssprungfunktion $h(t-a)$ beschreibe man die Funktion f durch eine einzige Gleichung.
 (b) Man skizziere den Graphen der Funktion f und berechne ihre Laplacetransformierte.

Aufgabe 52: Berechnen Sie das Parameterintegral

$$J(t) = \int_0^1 \arcsin(tx) \, dx, \quad 0 \leq t < 1,$$

indem Sie zunächst die Ableitbarkeit von J prüfen und dann die Ableitung $J'(t)$ im offenen Intervall $0 < t < 1$ bestimmen. Schließen Sie hieraus auf $J(t)$, $0 \leq t < 1$, zurück und bestimmen Sie die Integrationskonstante durch den Wert des Integrals an der Stelle $t = 0$. Ist $J(t)$ nach $t = 1$ stetig fortsetzbar?

Aufgabe 53: Bestimmen Sie die Faltung $f * g$ für die Funktionenpaare

(a) $f(t) = \sin(t), \quad g(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < 3 \\ 2, & t \geq 3, \end{cases}$

(b) $f(t) = \cosh(t), \quad g(t) = \sin^2(t).$

Berechnen Sie außerdem $\mathcal{L}(f * g)$ und vergleichen Sie das Ergebnis mit $\mathcal{L}f \cdot \mathcal{L}g$.

Aufgabe 54: Gegeben ist das Anfangswertproblems

$$\begin{aligned} -3x'(t) + x(t) + 2y'(t) + 2y(t) &= 6e^t + 5e^{-2t}, \\ x'(t) - x(t) + y'(t) - y(t) - z'(t) + z(t) &= \frac{3}{2} + \frac{3}{2}e^{-2t}, \\ 2x'(t) - y(t) - z'(t) &= 0, \end{aligned}$$

mit

$$x(0) = 2, \quad y(0) = 3, \quad z(0) = 4.$$

Bestimmen Sie die erste Komponente der Lösung, die Funktion $x : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$. Hinweis: Verwenden Sie die Laplace-Transformation.

Aufgabe 55: Auf einer 30m langen Brücke steht, 6m vom rechten Auflager entfernt, ein Auto mit 3m Radstand und gleichen Achslasten $F = 7200\text{N}$. Die Brücke hat die spezielle Längenbelastung $q_0 = 14400\text{N/m}$ und die Biegesteifigkeit $EJ = 6 \cdot 10^9 [\text{Nm}^2]$. Dann gilt für die Auslenkung w der Brücke

$$EJ \cdot w''''(x) = q_0 + F\delta(x-21) + F\delta(x-24), \quad w(0) = w''(0) = w(30) = w''(30) = 0.$$

Bestimmen Sie $w(x)$ mit Hilfe der Laplace-Transformation. Hinweis: Sie können zum Beispiel $w'(0) = A$ und $w'''(0) = B$ setzen und die Konstanten A und B am Schluß aus den Bedingungen $w(30) = w''(30) = 0$ berechnen.

Abgabetermin: Mittwoch, den 8.7.2009, 12:30 Uhr, in den Fächern bei Zimmer 208.1 im Mathematikgebäude (20.30).

11. Tutorium
zur Vorlesung Höhere Mathematik II für
biw/ciw/mach/mage/vt

Aufgabe T41: Gegeben sei die Funktion $\Lambda(x) = \begin{cases} x & 0 \leq x < 1 \\ 2 - x & 1 \leq x < 2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$.

- (a) Berechnen Sie die Laplacetransformierte $\mathcal{L}\Lambda(s)$.
 (b) Stellen Sie $f(x)$ mit Hilfe von $\Lambda(x)$ in geschlossener Form dar:

$$f(x) = \begin{cases} 4x & 0 \leq x < 1 \\ -x + 5 & 1 \leq x < 2 \\ x^2 - 5x + 9 & 2 \leq x < 3 \\ -x^2 + 4x & 3 \leq x < 4 \\ 0 & x \geq 4 \end{cases}$$

- (c) Stellen Sie damit die Laplacetransformierte $\mathcal{L}f(s)$ mit Hilfe von $\mathcal{L}\Lambda(s)$ dar.

Aufgabe T42: Überprüfen Sie die Stetigkeit und Differenzierbarkeit von J und berechnen Sie die Ableitung des folgenden Parameterintegrals für $t \in \mathbb{R}$:

$$J(t) = \int_0^1 \arctan(tx) \, dx.$$

Besitzt die Ableitung einen Grenzwert für $t \rightarrow 0$?

Aufgabe T43: Bestimmen Sie die Faltung $f * g$ für die Funktionenpaare

(a) $f(t) = t^2$; $g(t) = 1 - h(t - 1)$, wobei $h(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t \geq 0 \end{cases}$.

(b) $f(t) = \sinh t$; $g(t) = \sin 2t$.

Berechnen Sie $\mathcal{L}(f * g)$ und vergleichen Sie das Ergebnis mit $\mathcal{L}f \cdot \mathcal{L}g$.

Aufgabe T44: Lösen Sie das folgende Anfangswertproblem mit Hilfe der Laplace-Transformation:

$$\begin{aligned} x(t) - 2y(t) + z(t) &= -2t, \\ -x'(t) + 3y'(t) - 2x(t) + y(t) &= 3 + t, \\ 3z''(t) - 5x'(t) - 2z(t) &= 0, \end{aligned}$$

$$x(0) = 1, \quad y(0) = -1, \quad z(0) = -3, \quad z'(0) = 2.$$