Universität Karlsruhe (TH)
Institut für Algebra und Geometrie
PD Dr. F. Hettlich
Dipl.-Math. K. Kremer
Dipl.-Math.techn. S. Ritterbusch

56	57	58	59	60	$\sum$

Gruppe

Karlsruhe, den 7.7.2009

Matrikel-Nr.: ....

Matrikel-Nr.: ....

12. Übungsblatt zur Vorlesung Höhere Mathematik II für biw/ciw/mach/mage/vt

Aufgabe 56: Gegeben ist die Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1 \cos(x_2) \cos(x_3)\,, \quad x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}.$$

Berechnem Sie den Gradienten $\nabla f(x)$ und die Hessematrix $H_f(x) = \left(\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_j \partial x_i}\right)_{i,j=1,2,3}$ (d.h. die Matrix, deren Einträge die zweiten partiellen Ableitungen von f sind).

Aufgabe 57: Sei die Funktion $f(x) = x_1^2 x_2$, $x \in \mathbb{R}^2$, und ein Vektor $d = (\cos\varphi, \sin\varphi)^\top$, $\varphi \in [0, 2\pi)$ gegeben.

(a) Berechnen Sie den Gradienten ∇f und das Skalarprodukt $d \cdot \nabla f$ an der Stelle x.

(b) Berechnen Sie die Richtungsableitung $\frac{\partial f}{\partial d}(x)$ nach der Definition 4.14.

Aufgabe 58:

(a) Berechnen Sie $(f^T g)'$ und $(f \circ g)'$ für

$$f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_1 + x_2^2 \\ 2x_2^3 \end{pmatrix}, \quad g(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_2 \sin(x_1) \\ \cos(x_1) + x_2 \end{pmatrix}, \quad x_1, x_2 \in \mathbb{R}.$$

(b) Berechnen Sie $(f \circ g)'$ zunächst direkt und dann mit Hilfe der Kettenregel für

$$f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_1 + 1 \\ x_2^2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad g(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_1 \cosh(x_2) \\ x_1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 59: Bestimmen Sie die Ableitung der Funktion $f : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(s) := \int_{1/s}^{s^2} \frac{\sin(st)}{t}\, dt\,,$$

indem Sie partielle Ableitungen von $g(x, y, z) = \int_x^y \frac{\sin(zt)}{t}\, dt$ und die Kettenregel verwenden.

Aufgabe 60: Herr K. wandert durch den Hochschwarzwald, dessen Topographie durch die Funktion

$$f(x, y) = x^2 y - xy^2 + 3xy - 5x^2 + 10x + 5y^2 - 40y + 500$$

gegeben ist, wobei $x, y \in [0, 10]$ Koordinaten (in Kilometern) sind und $f(x, y)$ die Höhenmeter angibt. In den ersten zwei Stunden, $t \in [0, 2]$ in Stunden, verläuft sein Wanderweg entlang des Wegs $c(t) = (x, y)^\top = (4t - t^2, 6 - 2t)^\top$.

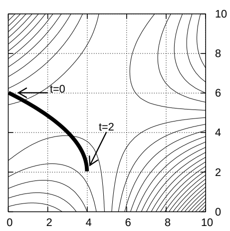
(a) Bestimmen Sie den Gradienten von f.

(b) Zeigen Sie, dass $x = 5$ und $y = 5$ zwei Höhenlinien sind dadurch, dass Sie ausrechnen, dass f dort konstant ist. Zeigen Sie auch, dass der Gradient senkrecht auf den Höhenlinien steht.

(c) Bestimmen Sie sowohl Herrn K.s Wandergeschwindigkeit $\|c'(t)\|$ als auch seine Wanderrichtung $r(t) = \frac{1}{\|c'(t)\|} c'(t)$ zum Zeitpunkt t. Berechnen Sie den Anstieg des Wanderwegs zu $t = 1$, also die Richtungsableitung von f in Wanderrichtung an $c(1)$.

(d) Berechnen Sie die Ableitung der Funktion $f \circ c$ mit Hilfe der Kettenregel. Was ist Herrn K.s Anstiegsgeschwindigkeit zu $t = 1$?

Der Wanderweg:



Abgabetermin: Mittwoch, den 15.7.2009, 12:30 Uhr, in den Fächern bei Zimmer 208.1 im Mathematikgebäude (20.30).

12. Tutorium
zur Vorlesung Höhere Mathematik II für biw/ciw/mach/mage/vt

Aufgabe T45:

(a) Berechnen Sie die Ableitung (d.h. die Jacobimatrix) $f'(x)$ und den Gradienten ∇f für die Funktion

$$f(x_1, x_2, x_3) := \frac{x_1}{\cos(x_1 + x_2 + 2x_3)}.$$

(b) Was ist die Ableitung der Funktion

$$g(x_1, x_2, x_3) := \frac{(x_1, x_2, x_3)^\top}{1 + x_1 + x_2 + x_3}\,?$$

Aufgabe T46: Gegeben ist die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ durch $f(x) := 3x_1 + x_2^2$ und ein Vektor $d := (\cos\varphi, \sin\varphi)^\top$, $\varphi \in [0, 2\pi)$. Berechnen Sie den Gradienten $\nabla f(x)$ an der Stelle x und das Skalarprodukt $d \cdot \nabla f(x)$ sowie die Richtungsableitung $\dfrac{\partial f}{\partial d}(x)$ mit Hilfe der Definition.

Aufgabe T47:

(a) Gegeben sind vektorwertige Funktionen

$$f(x, y) = \begin{pmatrix} xy \\ x^2 + y^2 \end{pmatrix}, \quad g(x, y) = \begin{pmatrix} \cos x \\ \sin y \end{pmatrix}, \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

Berechnen Sie $(f^\top g)'$ und $(f \circ g)'$.

(b) Berechnen Sie für die vektorwertige Funktionen

$$f(x, y) = \begin{pmatrix} xy \\ x^2 - y^2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad g(x, y) = \begin{pmatrix} y \cosh x \\ y \sinh x \end{pmatrix}, \quad x, y \in \mathbb{R}$$

die Ableitung $(f \circ g)'$ zunächst direkt und dann mit Hilfe der Kettenregel.

Aufgabe T48:

(a) Bestimmen Sie die partiellen Ableitungen der durch ein Parameterintegral gegebene Funktion

$$F(x, y) = \int_1^{\sqrt{x}} \frac{1}{\tau} \cos(\tau^2 y \pi)\, d\tau, \quad x, y \geq 1\,.$$

(b) Berechnen Sie den Wert $g'(2)$ von der Funktion $g(t) = \displaystyle\int_1^{\sqrt{t}} \frac{1}{\tau} \cos(\tau^2 t^2 \pi)\, d\tau, \quad t \geq 1\,.$

Hinweis: Benutzen Sie $g(t) = F(t, t^2)$ und die Kettenregel.

Tutorien: Donnerstag, den 9.7.2009, bis Montag, den 13.7.2009.