Universität Karlsruhe (TH)
Institut für Algebra und Geometrie
PD Dr. F. Hettlich
Dipl.-Math. K. Kremer
Dipl.-Math.techn. S. Ritterbusch

| 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | $\Sigma$ |
|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | |

Gruppe

Karlsruhe, den 28.04.2009

Matrikel-Nr.: ..................

Matrikel-Nr.: ..................

# 2. Übungsblatt
# zur Vorlesung Höhere Mathematik II für biw/ciw/mach/mage/vt

**Aufgabe 6:** Gegeben sind die folgenden Vektoren aus dem $\mathbb{R}^4$:

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad v = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad w = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad z = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}$$

(a) Berechnen Sie die Linearkombinationen $u + v - z$, $2v - (w - z)$, $2u - v + 2w$.

(b) Zeigen Sie, dass die Vektoren $u$, $v$, $w$ eine Basis des Raums $\operatorname{span}\{u, v, w\}$ darstellen.

(c) Was ist die Dimension von $\operatorname{span}\{u, v, w, z\}$?

**Aufgabe 7:** Bestimmen Sie alle möglichen Linearkombinationen, mit denen der Vektor $x = (3, 1, 2)^\top$ mittels

(a) $a^{(1)} = (4, 1, 1)^\top$, $a^{(2)} = (1, 2, 3)^\top$, $a^{(3)} = (5, 6, 7)^\top$,

(b) $b^{(1)} = (2, 1, 1)^\top$, $b^{(2)} = (1, -1, 6)^\top$, $b^{(3)} = (5, 1, 8)^\top$,

(c) $c^{(1)} = (5, 1, 4)^\top$, $c^{(2)} = (4, 1, 3)^\top$, $c^{(3)} = (-1, 3, -4)^\top$

dargestellt werden kann.

**Aufgabe 8:** Gegeben sei die Ebene $E : 4x_1 + x_3 + 8 = 0$, der Punkt $P = (2|1|1)$ und die Gerade $H : x(\lambda) = (4, 3, -2)^\top + \lambda(3, 1, -1)^\top$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

(a) Bestimmen Sie eine Gerade durch den Punkt $P$, die senkrecht auf $E$ steht.

(b) Bestimmen Sie den Abstand von $P$ zu $E$ und den Punkt $Q$ auf $E$, der $P$ am nächsten ist.

(c) Bestimmen Sie den Schnittpunkt der Geraden $H$ mit $E$ und den Punkt $R$ auf $H$, der von $P$ den geringsten Abstand hat.

**Aufgabe 9:** Gegeben seien die Punkte $P = (2|1|0)$, $Q = (1|3| - 1)$ und $R = (0|2|0)$.

(a) Bestimmen Sie eine Parameterdarstellung und Normalform der Ebene $E$ auf den Punkten $P$, $Q$, $R$.

(b) Schneidet die Gerade $G : x(u) = (-2, -7, 0)^\top + u(3, 2, 1)^\top$, $u \in \mathbb{R}$, die Ebene $E$? Wenn ja bestimmen Sie Schnittpunkt und Schnittwinkel.

(c) Bestimmen Sie die Projektion des Richtungsvektors $(3, 2, 1)^\top$ der Geraden $G$ auf den Normalenvektor der Ebene $E$, und bestimmen Sie damit und dem Schnittpunkt die Projektionsgerade $H$ von $G$ auf $E$.

**Aufgabe 10:** Im Vektorraum $C[0, 1]$ der auf dem Intervall $[0, 1]$ stetigen Funktionen sei $U$ der von den beiden Polynomen $b^{(1)}(x) = 1$ und $b^{(2)}(x) = x - \frac{1}{2}$ aufgespannte Untervektorraum. Wir definieren $y(x) := \sqrt{x}$ und das Skalarprodukt zweier Funktionen durch

$$\langle f, g\rangle := \int_0^1 f(x)\overline{g(x)}\, dx \in \mathbb{C}\,.$$

(a) Bestimmen Sie eine Linearkombination $c = a_1 b^{(1)} + a_2 b^{(2)} \in U$, so dass $c(0) = y(0)$ und $c(1) = y(1)$ gilt.

(b) Bestimmen $d \in U$ mit dem geringsten Abstand zu $y$, d.h. der Abstandvektor $e = d - y$ soll senkrecht zu $b^{(1)}$ und $b^{(2)}$ sein. Zeichnen Sie $y$ und die Näherungen $c$ und $d$ auf $[0, 1]$ in ein Schaubild.
Anmerkung: Mit finiten Elementen rechnet man orthogonale Näherungen im Sinne von $d$ aus.

**Abgabetermin:** Mittwoch, den 6.05.2009, 12:30 Uhr, in den Fächern bei Zimmer 208.1 im Mathematikgebäude (20.30).

**2. Tutorium**
**zur Vorlesung Höhere Mathematik II für**
**biw/ciw/mach/mage/vt**

**Aufgabe T5:** Gegeben seien die Vektoren

$$u = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \qquad v = \begin{pmatrix} -9 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \qquad w = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

im $\mathbb{R}^3$.

(a) Bestimmen Sie die folgenden Linearkombinationen der drei Vektoren: $u + w$, $v - 3u$, $2u - v + w$.

(b) Zeigen Sie, dass je zwei der Vektoren linear unabhängig sind.

(c) Sind die drei Vektoren ebenfalls linear unabhängig?

**Aufgabe T6:** Für welches $\alpha \in \mathbb{R}$ ist $x = (-7, \alpha, 2)^\top$ darstellbar als Linearkombination von $a^{(1)} = (1, 2, 4)^\top$, $a^{(2)} = (-2, 1, 2)^\top$ und $a^{(3)} = (3, 1, 2)^\top$? Berechnen Sie dann alle möglichen Linearkombination, die $x$ erreichen.

**Aufgabe T7:** Gegeben seien die Ebenen

$$E : x_1 - x_3 = 0 \qquad \text{und} \qquad F : x_1 + 2x_2 + x_3 = 4.$$

(a) Bestimmen Sie die Schnittgerade $G$ von $E$ und $F$.

(b) Für eine weitere Gerade $H$, die nicht in $E$ oder $F$ liegt, gibt es folgende Möglichkeiten:

- sie schneidet sowohl $E$ als auch $F$ in genau einem Punkt (unter welchen Winkeln?),
- sie schneidet eine der beiden Ebenen in einem Punkt, die andere aber gar nicht,
- sie schneidet keine der beiden Ebenen.

Finden Sie für jede dieser Möglichkeiten ein Beispiel und machen Sie sich jeweils die geometrische Lage der Ebenen und der Gerade zu einander klar.

**Aufgabe T8:** Gegeben seien die Punkte $P = (2|1|-4)$, $Q = (-1|-5|-1)$ und die Ebene $E : x_1 + 2x_2 - x_3 = 2$.

(a) Bestimmen Sie eine Parameterdarstellung der Geraden $G$ durch $P$ und $Q$, sowie eine Parameterdarstellung von $E$.

(b) Berechnen Sie den Schnittpunkt $S$ von $G$ und $E$, und zeigen Sie, dass die Gerade $G$ und die Ebene $E$ sich senkrecht schneiden. Welchen Abstand hat $P$ von $E$?

**Tutorien:** Donnerstag, den 30.4.2009, bis Montag, den 4.5.2009.