Universität Karlsruhe (TH)
Institut für Algebra und Geometrie
PD Dr. F. Hettlich
Dipl.-Math. K. Kremer
Dipl.-Math.techn. S. Ritterbusch

11	12	13	14	15	Σ

Gruppe

Karlsruhe, den 5.05.2009

Matrikel-Nr.: ....

Matrikel-Nr.: ....

3. Übungsblatt zur Vorlesung Höhere Mathematik II für biw/ciw/mach/mage/vt

Aufgabe 11: Gegeben seien die drei Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Stellen Sie fest, welche der folgenden Produkte definiert sind und berechnen Sie sie gegebenenfalls: AB, $BA^\top$, CA, $CA^\top$, $C^\top A^\top$, $B^\top C^\top A^\top$, $(BA^\top)^\top C^\top$, $(CB)^\top A$.

Aufgabe 12: Gegeben sind die beiden Vektoren $x = (1,2)^\top$ und $y = (\alpha, 2)^\top$ im $\mathbb{R}^2$ mit einem Parameter $\alpha \in \mathbb{R}$. Wir suchen ein $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, so dass $Ax = y$ und $Ay = x$. Für welche α kann man so ein A eindeutig bestimmen? Berechnen Sie für diesen Fall die Matrix A und bei Existenz deren inverse Matrix A^{-1}.

Aufgabe 13: Leichtmatrose Hein Blöd erhält von Käptn Blaubär für 3 mal Küchendienst (K) und einmal Deck schrubben (S) einen Euro (E) und einen Purpurpudding (P). Für einmal Deck schrubben und vier Angelruten (R) erhält er ebenfalls einen Purpurpudding. Für zwei Angelruten und vier gefangene Fische (F) kann er sich in der Hafenkneipe eine Bärenlimo (L) gönnen. Außerdem erzählt ihm der Käptn für die Gegenleistung von α Fischen und einem Küchendienst eine seiner irren Seemannsgeschichten (G). Hierbei ist $\alpha \in \mathbb{R}$ ein Parameter, der von der Laune des Käptns abhängt. Stellen Sie zunächst die Abbildungsmatrix A_α auf, die die lineare Abbildung $(E, P, L, G)^\top \mapsto (K, S, R, F)^\top$ beschreibt. Für welche α ist diese Matrix invertierbar? Berechnen Sie für alle solche α die inverse Matrix und erläutern Sie deren Bedeutung im Hinblick auf Küchendienste, Deck schrubben, Angelruten und Fische.

Aufgabe 14: Sei $A = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 & -1 \\ -1 & 7 & -1 & -1 \\ 5 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 7 \end{pmatrix}$, $b_1 = (1,1,1,1)^\top$, $b_2 = (1,0,-1,0)^\top$ und $y = (1,3,5,3)^\top$.

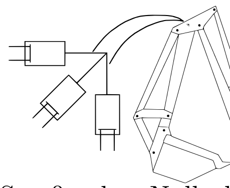
(a) Finden Sie b_3 und b_4, sodass b_1, b_2, b_3 und b_4 orthogonal zu einander sind.

(b) Bestimmen Sie die Vektoren Ab_k und prüfen Sie, ob es α_k gibt, sodass $Ab_k = \alpha_k b_k$, $k = 1,2,3,4$.

(c) Stellen Sie y als Linearkombination aus b_k, $k = 1,2,3,4$ dar, d.h. finden Sie die Darstellung $\lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \lambda_3 b_3 + \lambda_4 b_4 = y$. Hinweis: Skalarprodukt und die Orthogonalität der Vektoren b_k, $k = 1,2,3,4$.

(d) Bestimmen Sie x als Linearkombination der Vektoren b_k, $k = 1,2,3,4$ durch die gewonnenen α_k und λ_k in $Ax = y$.

Aufgabe 15: *Durch eine Dehnmessstreifen-Rosette kann auf der Oberfläche eines Bewegungsmechanismus einer Baggerschaufel der Verzerrungszustand in Form des Verzerrungstensors bzgl. des x_1, x_2, x_3-Koordinatensystems bestimmt werden. Aus dem Tensor will man die Hauptdehnungen bestimmen. Diese sind bei isotropen Materialien ein Maß für die auftretenden maximalen Kräfte in den zugehörigen Richtungen. Zum aus der Messung bestimmten Tensor ε betrachten wir das nebenstehende LGS mit Parameter $\lambda \in \mathbb{R}$:*



$$\varepsilon = \frac{1}{50}\begin{pmatrix} 142 & -144 & 0 \\ -144 & 58 & 0 \\ 0 & 0 & -125 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{array}{rrrcl} 142x_1 & -144x_2 & & = & 50\lambda x_1 \\ -144x_1 & +58x_2 & & = & 50\lambda x_2 \\ & & -125x_3 & = & 50\lambda x_3 \end{array}$$

Bestimmen Sie die Hauptdehnungen, d.h. alle $\lambda \in \mathbb{R}$, für die Sie weitere Lösungen zum LGS außer dem Nullvektor bestimmen können und geben Sie jeweils zu jeder Hauptdehnung eine auf die Länge 1 normierte Lösung als zugehörige Hauptdehnungsrichtung an. Unter welchem Winkel stehen die Hauptdehnungsrichtung zueinander, bilden sie eine Basis, und um welchen Winkel sind sie zur Standardbasis verdreht?

Abgabetermin: Mittwoch, den 13.5.2009, 12:30 Uhr, in den Fächern bei Zimmer 208.1 im Mathematikgebäude (20.30).

3. Tutorium
zur Vorlesung Höhere Mathematik II für
biw/ciw/mach/mage/vt

Aufgabe T9: Welche der Produkte AB, AX, $BX, X^\top A$, $(A^\top X)^\top B$, $B^\top X$, $XX^\top$ aus den unten angegebenen Matrizen sind definiert? Bestimmen Sie ihre Größe und berechnen Sie sie gegebenenfalls.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 8 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -2 & 8 \\ 6 & 5 \end{pmatrix} \qquad X = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe T10: Berechnen Sie die Inversen der Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

und bestimme eine Matrix $C \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ mit

$$ACB = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Hinweis: Die Matrixmultiplikation ist nicht *kommutativ*, d.h. es ist i.A. $AB \neq BA$.

Aufgabe T11: Gegeben seien die 3 Vektoren

$$b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad b_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad b_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

des $\mathbb{R}^3$. Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix A der linearen Abbildung Φ mit $\Phi(e_1) = b_1,\ \Phi(e_2) = b_2,\ \Phi(e_3) = b_3$, wobei e_j den j-ten Koordinateneinheitsvektor bezeichne. Gegeben seien ferner die Vektoren

$$c_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad c_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}, \qquad c_3 = \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass durch die Matrix

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 7 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

eine lineare Abbildung $\Psi : x \mapsto Bx$ gegeben ist, mit $Bc_j = e_j$, $j = 1, 2, 3$. Zeigen Sie auch, dass für die lineare Abbildung $\Lambda : x \mapsto (AB)x$ gilt: $\Lambda(c_j) = b_j$, $j = 1, 2, 3$.

Aufgabe T12: Gegeben seien die Vektoren $x^{(1)} = (1, 0, 0)^\top, x^{(2)} = (1, 0, 1)^\top, x^{(3)} = (1, -1, 0)^\top$ sowie $y^{(1)} = (1, 2, 3)^\top, y^{(2)} = (2, -2, 7)^\top, y^{(3)} = (-1, 0, -3)^\top$. Bestimmen Sie eine Matrix A, so dass $Ax^{(i)} = y^{(i)}$ für $i \in \{1, 2, 3\}$ gilt.

Tutorien: Donnerstag, den 7.5.2009, bis Montag, den 11.5.2009.