Universität Karlsruhe (TH)
Institut für Algebra und Geometrie
PD Dr. F. Hettlich
Dipl.-Math. K. Kremer
Dipl.-Math.techn. S. Ritterbusch

16	17	18	19	20	$\sum$

Gruppe

Karlsruhe, den 12.05.2009

Matrikel-Nr.: ....

Matrikel-Nr.: ....

4. Übungsblatt zur Vorlesung Höhere Mathematik II für biw/ciw/mach/mage/vt

Aufgabe 16: Berechnen Sie die Determinante

$$D = \begin{vmatrix} -3 & 0 & 0 & 7 \\ 6 & 4 & -1 & -3 \\ 0 & -5 & 2 & 2 \\ 3 & -7 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

(a) durch Entwicklung nach der ersten Zeile,

(b) durch Entwicklung nach der letzten Spalte,

(c) mit Hilfe des Gaußschen Verfahrens.

Aufgabe 17: Bestimmen Sie die Determinante der Matrix A:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 & 2 & 1 \\ -2 & -2 & 4 & -1 & 6 \\ 2 & -1 & -5 & -5 & -2 \\ 3 & -3 & -11 & -2 & -4 \\ 2 & -1 & -3 & -7 & -6 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 18: Gegeben seien

$$A = \begin{pmatrix} 5 & i-1 & 7 & -4 \\ 5 & \frac{1}{2}(1-i) & 5 & -3 \\ 4 & 0 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{4\times 4} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -i-1 & -2 & -2 \\ 2 & -i-1 & -4 & -4 \\ 3 & -5i-5 & -4 & -4 \\ 4 & -7i-7 & -6 & -7 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{4\times 4}$$

Bestimmen Sie $\det(A)$ und $\det(B)$, sowie $\det(AB^*)$ und $\det(A^{-1}B)$.

Aufgabe 19: Wir betrachten die Frage, unter welchen Bedingungen ein Polynom p zweiten Grades durch die Bedingungen $p(a_1) = b_1$, $p(a_2) = b_2$, $p(a_3) = b_3$ eindeutig bestimmt ist, der Graph also eindeutig durch drei Punkte gelegt werden kann.

(a) Berechnen Sie die Determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 \\ 1 & a_2 & a_2^2 \\ 1 & a_3 & a_3^2 \end{vmatrix}.$$

Wann hat sie den Wert 0?

(b) Stellen Sie das Gleichungssystem für die Koeffizienten c_1, c_2, c_3 im Polynom $p(x) = c_1 + c_2x + c_3x^2$ auf, wenn das Polynom die Bedingungen $p(a_j) = b_j$, $j = 1, 2, 3$ erfüllen soll.

(c) Unter welchen Bedingungen an a_j, b_j, $j = 1, 2, 3$ ist das Gleichungssystem für die Koeffizienten c_j, $j = 1, 2, 3$ eindeutig lösbar?

Aufgabe 20: Betrachten Sie die lineare Abbildung $\psi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit der folgenden Abbildungsmatrix bezüglich der Standardbasis:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -2 & -1 & 2 \\ -2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie einen Vektor b_3 mit $\psi(b_3) = b_3$. Zeigen Sie, dass $B = \{b_1, b_2, b_3\}$ mit $b_1 = (1,1,1)^\top$, $b_2 = (0,1,1)^\top$ eine Basis ist, und stellen Sie die Abbildungsmatrix von ψ bezüglich der Basis B dar.

Abgabetermin: Mittwoch, den 20.5.2009, 12:30 Uhr, in den Fächern bei Zimmer 208.1 im Mathematikgebäude (20.30).

4. Tutorium
zur Vorlesung Höhere Mathematik II für
biw/ciw/mach/mage/vt

Aufgabe T13: Berechnen Sie die Determinanten

$$\text{(a) } D = \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}, \qquad \text{(b) } D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{vmatrix}, \qquad \text{(c) } D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \\ 1 & 4 & 16 & 64 \\ 1 & 5 & 25 & 125 \end{vmatrix}.$$

Aufgabe T14: Berechnen Sie die vierreihige Determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & \pi & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

(a) durch Entwickeln nach der 3ten Zeile,

(b) durch Entwickeln nach der 4ten Spalte,

(c) durch den Gauß-Algorithmus.

Aufgabe T15:

(a) Bestimmen Sie in Abhängigkeit von $\alpha \in \mathbb{R}$ die Determinante der Matrix $A_\alpha \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ mit

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & \alpha & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & \alpha \\ 1 & 1 & 0 & \alpha+1 \end{pmatrix}.$$

(b) Für welche Werte von $\alpha \in \mathbb{R}$ ist das lineare Gleichungssystem $A_\alpha x = b$ mit $b = (2, -1, 0, 0)^\top$ lösbar?

Aufgabe T16: Die lineare Abbildung $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ist bezüglich der Standardbasis durch die Abbildungsmatrix

$$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 7 & 10 \\ -5 & -7 \end{pmatrix}$$

gegeben. Außerdem ist mit $b^{(1)} = (-1, 1)^\top$ und $b^{(2)} = (-3, 2)^\top$ eine Basis $B = \{b^{(1)}, b^{(2)}\}$ des $\mathbb{R}^2$ gegeben.

(a) Geben Sie die Basistransformationsmatrix an, die Vektoren $x = \alpha_1 b^{(1)} + \alpha_2 b^{(2)} = (\alpha_1, \alpha_2)_B^\top$ dargestellt bezüglich der Basis B in die entsprechende Darstellung $x = \beta_1 e^{(1)} + \beta_2 e^{(2)} = (\beta_1, \beta_2)^\top$ transformiert.

(b) Geben Sie die Basistransformationsmatrix an, die Vektoren bezüglich der Standardbasis zu Darstellungen bezüglich der Basis B transformiert.

(c) Geben Sie die Abbildungsmatrix der Abbildung Φ bezüglich der Basis B an. Was ist Φ?

Tutorien: Donnerstag, den 14.5.2009, bis Montag, den 18.5.2009.