Universität Karlsruhe (TH)
Institut für Algebra und Geometrie
PD Dr. F. Hettlich
Dipl.-Math. K. Kremer
Dipl.-Math.techn. S. Ritterbusch

21	22	23	24	25	$\sum$

Gruppe

Karlsruhe, den 19.05.2009

Matrikel-Nr.: ....

Matrikel-Nr.: ....

5. Übungsblatt zur Vorlesung Höhere Mathematik II für biw/ciw/mach/mage/vt

Aufgabe 21: Bestimmen Sie alle Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix

$$C = \begin{pmatrix} 5 & 4 & -5 & 5 \\ -1 & 1 & 2 & -2 \\ -3 & -4 & 7 & -5 \\ -4 & -5 & 7 & -5 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 22: Gegeben sind die beiden Ebenen $E:\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 = 0$ und $F:\ x(\lambda,\mu) = (0,1,0)^\top + \lambda(4,1,3)^\top + \mu(4,-7,3)^\top$. Die lineare Abbildung $\Phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ sei die Spiegelung an E und die Abbildung $\Psi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ die Orthogonalprojektion auf F.

(a) Bestimmen Sie die Abbildungmatrizen A von Φ und B von Ψ in der Standardbasis. Prüfen Sie, ob A oder B orthogonal sind, und berechnen Sie die Matrixprodukte A^2 und B^2.

(b) Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren von Φ und Ψ.

Aufgabe 23: Die linearen Abbildungen $\Phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ und $\Psi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ haben die folgenden Abbildungsmatrizen bezüglich der Standardbasis:

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 7 & 4 & -4 \\ 4 & 1 & 8 \\ -4 & 8 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren von A und B.

(b) Prüfen Sie, ob es sich bei Φ und Ψ um eine Projektion, Spiegelung oder Rotation handelt. Bestimmen Sie dann auch Projektionsebene, Spiegelebene oder Rotationsachse und -winkel.

Aufgabe 24: Gegeben sei die Matrix $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 4 \\ 0 & -6 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

(a) Berechnen Sie die Eigenwerte von A.

(b) Sei $p(x) = c_3x^3 + c_2x^2 + c_1x + c_0$ das charakteristische Polynom von A. Zeigen Sie, dass $p(A) = 0$, d.h. $c_3A^3 + c_2A^2 + c_1A + c_0I_3 = 0$. (Das gilt auch allgemein für jede quadratische Matrix und ihr charakteristisches Polynom!)

(c) Bestimmen Sie aus $p(A) = 0$ die inverse Matrix A^{-1}.

Aufgabe 25: *In der Physikalischen Chemie werden mit Hilfe der Hückel-Theorie Molekülorbitale und die zugehörigen Energien von π-Elektronensystemen quantenmechanisch berechnet. Die Molekülstruktur wird in einer Art normierten Adjazenzmatrix dargestellt, wo jede Kohlenstoffverbindung mit einer 1 versehen wird. Die Eigenwerte der Matrix beschreiben dann die Energien, die Eigenvektoren die Molekülorbitalstruktur.*

Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix M zum dargestellten Cyclopropenyl-Radikal:

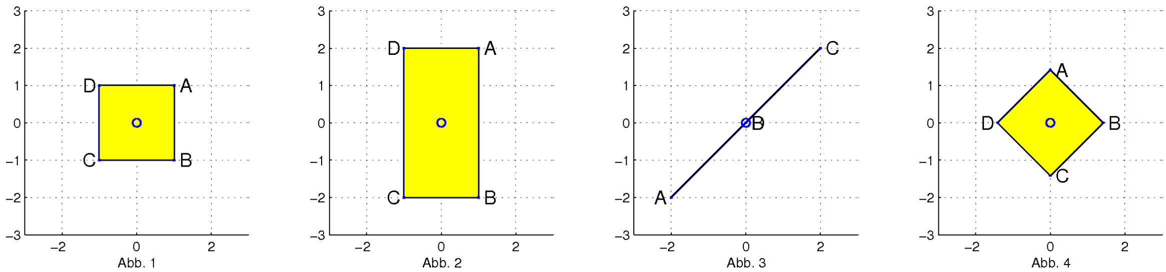
```
  C
 / \
C — C
```

$$\rightarrow \qquad M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Abgabetermin: Mittwoch, den 27.5.2009, 12:30 Uhr, in den Fächern bei Zimmer 208.1 im Mathematikgebäude (20.30).

5. Tutorium
zur Vorlesung Höhere Mathematik II für
biw/ciw/mach/mage/vt

Aufgabe T17: Die folgende Abbildung 1 zeigt ein aus den Punkten A, B, C, D gebildetes Quadrat um den Ursprung, die folgenden Abbildungen zeigen Bilder des Quadrats unter drei verschiedenen lineare Abbildungen $\Phi_{1,2,3} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$:



Bestimmen Sie die Eigenwerte der Abbildungen und zeichnen Sie, soweit möglich, Eigenvektoren ein.

Aufgabe T18:

(a) Berechnen Sie das charakteristische Polynom $p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ der Matrix A für $\lambda \in \mathbb{R}$ und

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

(b) Bestimmen Sie die Eigenwerte $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ der Matrix A, also die Nullstellen des Polynoms $p(\lambda)$.

(c) Geben Sie die Eigenvektoren zu den Eigenwerten an, also die Lösungsmenge des homogenen linearen Gleichungssystems $(A - \lambda_j I)x = 0$ für $j = 1, 2, 3$.

Aufgabe T19: Die lineare Abbildung $\Phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ sei eine Drehung um $\frac{\pi}{3}$ um die x_2-Achse, die lineare Abbildung $\Psi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ sei eine Spiegelung an der Ebene $E: \ x_1 + 2x_2 = 0$.

(a) Stellen Sie die Abbildungsmatrizen A von Φ und B von Ψ zur Standardbasis auf und prüfen Sie, dass A und B orthogonal sind.

(b) Bestimmen Sie die Eigenwerte von A und B, sowie deren Eigenvektoren zu reellen Eigenwerten.

Aufgabe T20: Bestimmen Sie alle Eigenwerte der quadratischen Matrizen

$$\text{(a)} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 7 & -2 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -5 & 3 \end{pmatrix}, \qquad \text{(b)} \quad B = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -5 & 5 \\ 5 & -9 & 5 \\ 5 & -5 & 1 \end{pmatrix},$$

sowie zu den reellen Eigenwerten λ je einen Eigenvektor.

Tutorien: Freitag, den 22.5.2009, bis Montag, den 25.5.2009.