

31	32	33	34	35	$\Sigma$

Gruppe
--------

Karlsruhe, den 2.06.2009

Matrikel-Nr.: .....

Matrikel-Nr.: .....

## 7. Übungsblatt zur Vorlesung Höhere Mathematik II für biw/ciw/mach/mage/vt

**Aufgabe 31:** Bestimmen Sie die allgemeine reelle Lösung der Differentialgleichung

$$0 = x^4 y^{(4)}(x) + 2x^3 y'''(x) + 3x^2 y''(x) - 3xy'(x) + 4y(x), \quad x > 0.$$

Hinweis: Das charakteristische Polynom ist durch  $q(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 2$  teilbar.

**Aufgabe 32:** Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} 0 &= (2x^2 + x)y''(x) - (4x^2 - 2)y'(x) - (4x + 4)y(x), \quad x \geq 1, \\ y(1) &= 3, \quad y'(1) = 0. \end{aligned}$$

Hinweis:  $y_1(x) = \frac{1}{x}$  ist eine Lösung der Differentialgleichung.

**Aufgabe 33:** Lösen Sie das Anfangswertproblem für das lineare System

$$\begin{aligned} u'(x) &= v(x), & u(0) &= 2, \\ v'(x) &= w(x), & v(0) &= 2, \\ w'(x) &= 4u(x) - 4v(x) + w(x), & w(0) &= -3. \end{aligned}$$

**Aufgabe 34:** Man löse das Anfangswertproblem für das komplexe lineare System

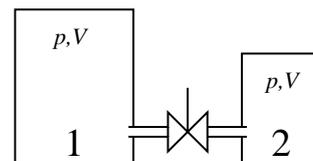
$$u'(x) = \begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{7}i & \frac{6}{7} \\ -\frac{65}{42} + i & -1 + \frac{5}{7}i \end{pmatrix} u(x), \quad x \in [0, \infty), \quad u(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

**Aufgabe 35:** Zwei Druckluftbehälter mit unterschiedlichen Volumina  $V_1$  und  $V_2$  sind durch eine zunächst verschlossene Rohrleitung verbunden. Vor Öffnen des Sperrventils zu  $t = 0$  herrschen in den Behältern unterschiedliche Druckpegel  $p_1(0)$  und  $p_2(0)$  vor. Aus der Zustandsgleichung idealer Gase  $pV = nRT$  ( $n$  Stoffmenge,  $R$  Gaskonstante,  $T$  Temperatur) erhalten wir unter Annahme eines isothermen Ausgleichs den Zusammenhang  $\dot{p}V = \dot{n}RT$  und letztlich mit dem Strömungswiderstand  $W$  der Rohrleitung,  $\dot{n} = Wp$  und  $a_{1,2} := \frac{RT}{WV_{1,2}}$  das folgende System für das Modell

$$\begin{pmatrix} \dot{p}_1(t) \\ \dot{p}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a_1 & a_1 \\ a_2 & -a_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1(t) \\ p_2(t) \end{pmatrix}.$$

Es sei  $p_1(0) = 1$  bar,  $p_2(0) = 9$  bar,  $a_1 = 1$  bar/s und  $a_2 = 3$  bar/s.

- Welcher Behälter erreicht einen Druck von zwei Bar und nach welcher Zeit?
- Welcher Druck wird nach vollständigem Druckausgleich erreicht werden?



**7. Tutorium**  
**zur Vorlesung Höhere Mathematik II für**  
**biw/ciw/mach/mage/vt**

**Aufgabe T25:** Gegeben sei das lineare Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned}u_1'(x) &= & - 2u_2(x), \\u_2'(x) &= u_1(x) + 2u_2(x).\end{aligned}$$

- (a) Bestimmen Sie die allgemeine (komplexe) Lösung.
- (b) Bestimmen Sie die reelle Darstellung der Lösung mit den Anfangswerten

$$u_1(0) = 0, \quad u_2(0) = 1.$$

**Aufgabe T26:** Lösen Sie das Anfangswertproblem für das lineare Differentialgleichungssystem

$$u'(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} u(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad u(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

**Aufgabe T27:** Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des Systems

$$x'(t) = Ax(t) = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} x(t).$$

Zeigen Sie dazu:

- (a)  $\lambda = -2$  ist doppelte Nullstelle des charakteristischen Polynoms von  $A$  und  $v^{(1)} = (1, 1)^\top$  ist ein zugehöriger Eigenvektor.
- (b) Der Ansatz  $x(t) = e^{\lambda t}v^{(2)} + te^{\lambda t}v^{(1)}$  liefert die Gleichung  $(A - \lambda I)v^{(2)} = v^{(1)}$ . Eine Lösung ist  $v^{(2)} = (0, 1)^\top$ .
- (c) Die Funktionen  $x^{(1)}(t) = e^{\lambda t}v^{(1)}$  und  $x^{(2)}(t) = e^{\lambda t}v^{(2)} + tx^{(1)}(t)$  bilden ein Fundamentalsystem.

**Aufgabe T28:** Gegeben sei die folgende Differentialgleichung für  $y$  in  $x \in \mathbb{R}$ :

$$y'''(x) + y''(x) - 4y'(x) - 4y(x) = 0$$

- (a) Bestimmen Sie die allgemeine reelle Lösung  $y(x)$ .
- (b) Sei  $u_1(x) = y(x)$ ,  $u_2(x) = y'(x)$  und  $u_3(x) = y''(x)$ . Stellen Sie die Ableitungen  $u_k'$ ,  $k = 1, 2, 3$  durch die Funktionen  $u_l$ ,  $l = 1, 2, 3$  dar und damit ein lineares System für  $u(x)$  auf.
- (c) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des linearen Systems aus Ihren Ergebnissen aus Aufgabenteil (a).