Universität Karlsruhe (TH)
Institut für Algebra und Geometrie
PD Dr. F. Hettlich
Dipl.-Math. K. Kremer
Dipl.-Math.techn. S. Ritterbusch

36	37	38	39	40	$\sum$

Gruppe

Karlsruhe, den 9.06.2009

Matrikel-Nr.: ....

Matrikel-Nr.: ....

8. Übungsblatt zur Vorlesung Höhere Mathematik II für biw/ciw/mach/mage/vt

Aufgabe 36: Geben Sie für die folgenden Differentialgleichungen für $y = y(x)$ die Nullstellen der charakteristischen Polynome und geeignete Ansätze vom Typ der rechten Seite an:

(a) $y'' + y = x \sin x$
(b) $y''' - 4y'' - 2y' + 20y = x^2 e^x$
(c) $y''' + 6y'' + 12y' + 8y = xe^{-2x}$
(d) $y''' + y'' - 6y' = xe^{2x} + 2e^{-3x}$
(e) $y^{(4)} + 4y''' + 6y'' + 4y' + 5y = -8\cos x - 8\sin x$
(f) $y^{(5)} + y^{(4)} - 4y''' - 16y'' - 20y' - 12y = e^{-3x}$

Hinweise: Eine Lösung in (e) lautet $y(x) = x\cos(x)$, in (f) lautet eine Lösung des homogenen Problems $y(x) = x\sin(x)e^{-x}$.

Aufgabe 37: Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung

$$y'''(x) + 3y''(x) + 3y'(x) + y(x) = x + 6e^{-x}\,,\ x \in \mathbb{R}.$$

Verwenden Sie einen Ansatz vom Typ der rechten Seite, um eine partikuläre Lösung zu finden.

Aufgabe 38: Gegeben sei die Differentialgleichung

$$x^2 y''(x) - 2xy'(x) + 2y(x) = x^3 \ln x, \quad x > 0.$$

Die zugehörige homogene Differentialgleichung besitzt eine Lösung der Form $y(x) = Ax + B$.

(a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des homogenen Problems durch Reduktion der Ordnung.

(b) Bestimmen Sie eine partikuläre Lösung des inhomogenen Problems mittels Variation der Konstanten.

(c) Lösen Sie das Anfangswertproblem der inhomogenen Differentialgleichung mit $y(1) = y'(1) = 1$.

Aufgabe 39: Gegeben sei die folgende Differentialgleichung

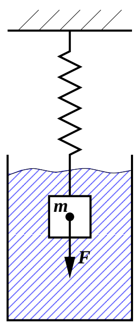
$$-15u(x) + 3xu'(x) + x^2 u''(x) = 8x^{-3}, \qquad x > 0.$$

(a) Geben Sie ein reelles Fundamentalsystem der zugehörigen homogenen Differentialgleichung an.

(b) Berechnen Sie eine partikuläre Lösung durch Variation der Konstanten und geben Sie die allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung an.

Aufgabe 40: Eine Masse von 5 kg dehnt eine Feder um 0.1 m. Dieses System befindet sich in einer viskosen Flüssigkeit. Durch diese Flüssigkeit wirkt auf die Masse bei einer Geschwindigkeit von 0.04 m/s eine bremsende Kraft von 2 N. Es wirkt eine äußere Kraft $F(t) = 2\,\cos(\omega t)$ N, $t > 0$, $\omega \in \mathbb{R}$. Für die Erdbeschleunigung können Sie $g = 10\,\mathrm{m/s^2}$ annehmen.

(a) Stellen Sie aus der Kräftebilanz von Federkraft $F_F(t) = -Du(t)$, Dämpfung $F_D(t) = -\sigma u'(t)$, Massenträgheit $F_T(t) = -mu''(t)$ und äußerer Kraft $F(t)$ die zugehörige Differentialgleichung auf und bestimmen Sie deren allgemeine reelle Lösung.



(b) Ein Summand in der Lösung, man nennt ihn auch die *stationäre Lösung,* gibt das Verhalten des Systems für große Zeiten wieder. Diese ist unabhängig von den Anfangsbedingungen.

Schreiben Sie die stationäre Lösung in der Form

$$A(\omega)\,\cos(\omega\,t - \delta),$$

und bestimmen Sie dasjenige ω, für das die Amplitude $A(\omega)$ maximal ist.

Abgabetermin: Mittwoch, den 17.6.2009, 12:30 Uhr, in den Fächern bei Zimmer 208.1 im Mathematikgebäude (20.30).

8. Tutorium
zur Vorlesung Höhere Mathematik II für
biw/ciw/mach/mage/vt

Aufgabe T29: Berechnen Sie das charakteristische Polynom zur Differentialgleichung

$$y'''(x) + y''(x) + 4y'(x) + 4y(x) = f(x)\,,\ x \in \mathbb{R}\,.$$

Bestimmen Sie Ansätze vom Typ der rechten Seite für:

$$\begin{array}{lll} f_1(x) = (1+x)e^{2x} & f_2(x) = e^{-x} & f_3(x) = \sin(2x) \\ f_4(x) = x^2\cos(2x) & f_5(x) = xe^{-x}\sin(2x) & f_6(x) = (2+x)\sin(2x) \end{array}$$

Aufgabe T30: Lösen Sie die Differentialgleichung mit einem Ansatz vom Typ der rechten Seite:

$$y'''(x) - 3y''(x) + 4y(x) = (x^2+4x+2)e^{3x} + e^{2x}\,,\ x \in \mathbb{R}$$

Aufgabe T31: Bestimmen Sie für die Differentialgleichung

$$x^2y''(x) - \frac{3}{2}xy'(x) + y(x) = x^3, \quad x > 0,$$

(a) zunächst die allgemeine Lösung der zugehörigen homogenen Differentialgleichung durch Reduktion der Ordnung. Nutzen Sie, dass $y_1(x) = x^2$ die homogene Differentialgleichung löst.

(b) Bestimmen Sie eine partikuläre und die allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung durch Variation der Konstanten.

(c) Geben Sie die Lösung des Anfangswertproblems mit $y(1) = \frac{17}{5}$ und $y'(1) = \frac{21}{5}$ an.

Aufgabe T32: Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der folgenden Differentialgleichung

$$x^2y''(x) + xy'(x) - 4y(x) = 1 + x^2, \quad x > 0.$$

Tutorien: Freitag, den 12.6.2009, bis Montag, den 15.6.2009.