6. Übungsblatt
Aufgaben mit Lösungen

Aufgabe 26:

(a) Berechnen Sie das charakteristische Polynom $p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ der Matrix A für $\lambda \in \mathbb{R}$ und

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

(b) Bestimmen Sie die Eigenwerte $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ der Matrix A, also die Nullstellen des Polynoms $p(\lambda)$.

(c) Geben Sie die Eigenvektoren zu den Eigenwerten an, also die Lösungsmenge des homogenen linearen Gleichungssystems $(A - \lambda_j I)x = 0$ für $j = 1, 2, 3$.

Lösung 26:

(a) $p(\lambda) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 2 \\ 1 & 2-\lambda & 2 \\ 1 & 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda) \begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 1 & 2-\lambda \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = \cdots = -\lambda^3 + 7\lambda^2 - 11\lambda + 5.$

(b) Nach Probieren von $\lambda = 1$ erhalten wir mit Polynomdivision $-\lambda^3 + 7\lambda^2 - 11\lambda + 5 = -(\lambda - 1)(\lambda^2 - 6\lambda + 5) = -(\lambda - 1)^2(\lambda - 5)$ und damit die Eigenwerte der Matrix A, $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 5$.

(c) Die Eigenwerte zum Eigenwert $\lambda_1 = 1$ erhalten wir aus dem linearen Gleichungssystem

$$(A - \lambda_1 I)x = (A - I)x = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} x = 0\,.$$

Nach einem Gauß-Schritt erhalten wir die Gleichung $x_1 + x_2 + 2x_3 = 0$, also sind alle $x = \alpha(1, -1, 0)^\top + \beta(2, 0, -1)^\top \neq 0$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ Eigenvektoren zu $\lambda_{1,2} = 1$.

Zum Eigenwert $\lambda_3 = 5$ lösen wir das Gleichungssystem $(A - \lambda_3 I)x = (A - 5I)x = 0$, dies führt auf das Tableau

$$\begin{array}{rrr} -3 & 1 & 2 \\ 1 & -3 & 2 \\ \boxed{1} & 1 & -2 \end{array} \quad \longrightarrow \quad \begin{array}{rrr} 0 & \boxed{4} & -4 \\ 0 & -4 & 4 \\ \mathbf{1} & 1 & -2 \end{array} \quad \longrightarrow \quad \begin{array}{rrr} 0 & \mathbf{4} & -4 \\ 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{1} & 0 & -1 \end{array}$$

aus dem wir mit $x_3 = -\alpha$ die Lösungen $x = \alpha(1, 1, 1)^\top$, $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ erhalten.

Aufgabe 27: Berechnen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 2 & 2a \end{pmatrix}$ mit $a \in \mathbb{R}$.

Lösung 27: Das charakteristische Polynom von A ist

$$p(\lambda) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 & 2 \\ 0 & 1-\lambda & a \\ 0 & 2 & 2a-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)(\lambda^2 - (2a+1)\lambda) = (3-\lambda)\lambda(\lambda - 2a - 1) \stackrel{!}{=} 0$$

Die Eigenwerte von A sind also $3, 0, 1 + 2a$. Wenn $a \neq 1$ und $a \neq -1/2$, dann sind die Eigenwerte verschieden und die zugehörigen Vektoren linear unabhängig (vgl. Satz 3.26 im Skript).

Zuerst berechnen wir die Eigenvektoren zu $\lambda = 3$: Das zu lösende LGS ist $(A - 3I_3)u = 0$, also

$$\left.\begin{array}{rrr|r} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & a & 0 \\ 0 & 2 & 2a-3 & 0 \end{array}\right. \quad \longrightarrow \quad \left.\begin{array}{rrr|r} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -a & 0 \\ 0 & 0 & 3a-3 & 0 \end{array}\right..$$

Aus der ersten Gleichung erhalten wir $u_3 = 0$, dann aus der zweiten $u_2 = 0$ und u_1 können wir beliebig wählen. Also die Eigenvektoren zu $\lambda = 3$ sind $u = \mu(1, 0, 0)^\top$ mit $\mu \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$.

Analog bestimmen wir die Eigenvektoren zu $\lambda = 0$: Das zu lösende LGS ist $(A - 0I_3)u = 0$, also

$$\left.\begin{array}{rrr|r} 3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & a & 0 \\ 0 & 2 & 2a & 0 \end{array}\right. \quad \longrightarrow \quad \left.\begin{array}{rrr|r} 3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right..$$

Die erste Gleichung ist $3u_1 = -2u_3$ und die zweite ist $u_2 = -au_3$. Somit sind die Eigenvektoren zu $\lambda = 0$ die Vektoren $u = \mu(-\frac{2}{3}, -a, 1)^\top$ mit $\mu \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$.

Für die Eigenvektoren zu $\lambda = 1 + 2a$ lösen wir das LGS $(A - (1 + 2a)I_3)u = 0$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2-2a & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2a & a & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right) \quad \to \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 2-2a & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Die erste Gleichung ergibt $(1 - a)u_1 = -u_3$ und die zweite $u_2 = \frac{1}{2}u_3$. Die Eigenvektoren zu $\lambda = 1 + 2a$ sind $u = \mu(1, \frac{a-1}{2}, a - 1)^\top$ mit $\mu \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$. Falls $a \neq 1$ und $a \neq -1/2$, sind die Eigenvektoren zu $\lambda = 1 + 2a$ verschieden von den Eigenvektoren zu $\lambda = 0$ und $\lambda = 3$. Falls $a = 1$ oder $a = -1/2$, liefert $\lambda = 1 + 2a$ keine neuen Eigenvektoren (Warum?). In diesem Fall spannen die gefundenen Eigenvektoren $\mathbb{R}^3$ nicht auf.

Aufgabe 28: Die lineare Abbildung $\Phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ sei eine Drehung um $\frac{\pi}{3}$ um die x_2-Achse, die lineare Abbildung $\Psi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ sei eine Spiegelung an der Ebene $E: \ x_1 + 2x_2 = 0$.

(a) Stellen Sie die Abbildungsmatrizen A von Φ und B von Ψ zur Standardbasis auf und prüfen Sie, dass A und B orthogonal sind.

(b) Bestimmen Sie die Eigenwerte von A und B, sowie deren Eigenvektoren zu reellen Eigenwerten.

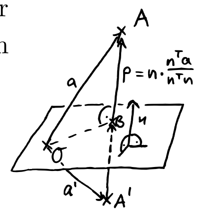
Lösung 28:

(a) Mit der Formel aus dem Skript erhalten wir

$$A = \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{3} & 0 & -\sin\frac{\pi}{3} \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\frac{\pi}{3} & 0 & \cos\frac{\pi}{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\sqrt{3} \\ 0 & 2 & 0 \\ \sqrt{3} & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

und diese Matrix ist orthogonal, denn $AA^\top = I$, bzw. $A^\top = A^{-1}$.

Um die Matrix der Spiegelung zu erhalten, überlegen wir uns zunächst (siehe Skizze), dass wir den zu a gespiegelten Vektor a' mit Hilfe der Formel $a' = a - 2p = a - 2n\frac{n^\top a}{n^\top n}$ bestimmen können. Durch Umklammern erhalten wir eine Formeln für B:



$$a' = a - 2\frac{n\,(n^\top a)}{n^\top n} = a - 2\frac{(nn^\top)a}{n^\top n} = a - 2\frac{nn^\top}{n^\top n}a = \underbrace{\left(I - 2\frac{nn^\top}{n^\top n}\right)}_{=B} a$$

Damit können wir die Abbildungsmatrix B von Ψ mit einem dyadischen Produkt bestimmen:

$$B = I - \frac{2}{(1,2,0)\,(1,2,0)^\top}\,(1,2,0)^\top\,(1,2,0) = I - \frac{2}{5}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & -4 & 0 \\ -4 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Auch die Matrix B ist orthogonal, denn $BB^\top = I$, also ist $B^\top = B^{-1}$, da die Matrix symmetrisch ist, gilt auch $B = B^{-1}$, was man bei einer Spiegelung erwarten sollte.

(b) Bei einer Drehung gibt es nur einen Vektor, der auf (ein Vielfaches von) sich selbst abgebildet wird, das ist die Drehachse, damit ist klar, dass $(0, 1, 0)^\top$ auf jeden Fall ein Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda_1 = 1$ ist. Um eventuelle weitere Eigenwerte zu bestimmen, berechnen wir das charakteristische Polynom von A:

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = -\lambda^3 + 2\lambda^2 - 2\lambda + 1 = -(\lambda - 1)(\lambda^2 - \lambda + 1)$$

Als weitere Nullstellen erhalten wir $\lambda_{2,3} = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{3}i$, welche auf komplexe Eigenvektoren führen würden.

Für alle Vektoren x in der Spiegelebene, also $x \in \operatorname{span}\{(2, -1, 0)^\top, (0, 0, 1)^\top\}$ gilt $\Psi(x) = x$. Für den Normalenvektor n gilt $\Psi(n) = -n$. Damit haben wir schon drei linear unabhängige Vektoren, die jeweils Eigenvektoren sind, und damit erhalten wir $\lambda_{1,2} = 1$ mit Eigenvektoren $(2, -1, 0)^\top$ und $(0, 0, 1)^\top$, sowie $\lambda_3 = -1$ mit Eigenvektor $(1, 2, 0)^\top$.

Aufgabe 29: Gegeben sei die Matrix $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 4 \\ 0 & -6 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

(a) Berechnen Sie die Eigenwerte von A.

(b) Sei $p(x) = c_3x^3 + c_2x^2 + c_1x + c_0$ das charakteristische Polynom von A. Zeigen Sie, dass $p(A) = 0$, d.h. $c_3A^3 + c_2A^2 + c_1A + c_0I_3 = 0$. (Das gilt auch allgemein für jede quadratische Matrix und ihr charakteristisches Polynom!)

(c) Bestimmen Sie aus $p(A) = 0$ die inverse Matrix A^{-1}.

Lösung 29: (a) Das charakteristische Polynom von A ist

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \det(A-\lambda I_3) = \begin{vmatrix} 5-\lambda & 0 & 4 \\ 0 & -6-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (5-\lambda)\begin{vmatrix} -6-\lambda & 0 \\ 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ -6-\lambda & 0 \end{vmatrix} \\ &= (5-\lambda)(-6-\lambda)(2-\lambda) - 4(-6-\lambda) = -(\lambda+6)(\lambda-1)(\lambda-6) = -\lambda^3+\lambda^2+36\lambda-36. \end{aligned}$$

Die Eigenwerte von A sind -6, 1, 6.
(b) Aus (a) wissen wir, dass $p(\lambda) = -\lambda^3+\lambda^2+36\lambda-36$, also wollen wir zeigen

$$p(A) = -A^3 + A^2 + 36A - 36I_3 \overset{!}{=} 0.$$

Nachrechen liefert $A^2 = \begin{pmatrix} 29 & 0 & 28 \\ 0 & 36 & 0 \\ 7 & 0 & 8 \end{pmatrix}$ und $A^3 = \begin{pmatrix} 173 & 0 & 172 \\ 0 & 216 & 0 \\ 43 & 0 & 44 \end{pmatrix}$. Also

$$p(A) = \begin{pmatrix} -173 & 0 & -172 \\ 0 & 216 & 0 \\ -43 & 0 & -44 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 29 & 0 & 28 \\ 0 & 36 & 0 \\ 7 & 0 & 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 180 & 0 & 144 \\ 0 & -216 & 0 \\ 36 & 0 & 72 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -36 & 0 & 0 \\ 0 & -36 & 0 \\ 0 & 0 & -36 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(c) Wir formen die Gleichung $-A^3 + A^2 + 36A - 36I_3 = 0$ um:

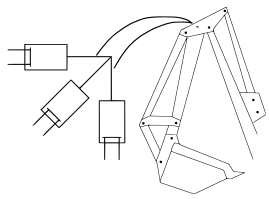
$$\frac{1}{36}\left(-A^2 + A + 36\right)A = I_3.$$

Daraus können wir schließen, dass $A^{-1} = \frac{1}{36}\left(-A^2 + A + 36\right)$. Also

$$A^{-1} = \frac{1}{36}\left[\begin{pmatrix} -29 & 0 & -28 \\ 0 & -36 & 0 \\ -7 & 0 & -8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 0 & 4 \\ 0 & -6 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 36 & 0 & 0 \\ 0 & 36 & 0 \\ 0 & 0 & 36 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & -\frac{2}{3} \\ 0 & -\frac{1}{6} & 0 \\ -\frac{1}{6} & 0 & \frac{5}{6} \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 30: Durch eine Dehnmessstreifen-Rosette kann auf der Oberfläche eines Bewegungsmechanismus einer Baggerschaufel der Verzerrungszustand in Form des Verzerrungstensors bzgl. des x_1, x_2, x_3-Koordinatensystems bestimmt werden. Aus dem Tensor will man die Hauptdehnungen bestimmen. Diese sind bei isotropen Materialien ein Maß für die auftretenden maximalen Kräfte in den zugehörigen Richtungen.

Berechnen Sie zum aus der Messung bestimmten Tensor



$$\varepsilon = \frac{1}{50}\begin{pmatrix} 142 & -144 & 0 \\ -144 & 58 & 0 \\ 0 & 0 & -125 \end{pmatrix}$$

alle Hauptdehnungen (d.h. die Eigenwerte von ε) und geben Sie zu jeder Hauptdehnung einen auf die Länge 1 normierte Eigenvektor als zugehörige Hauptdehnungsrichtung an. Unter welchem Winkel stehen die Hauptdehnungsrichtungen zueinander, bilden sie eine Basis, und um welchen Winkel sind sie zur Standardbasis verdreht?
Lösung 30: Das charakteristische Polynom von ε lautet

$$\begin{aligned} p(\lambda) = \det(\varepsilon - \lambda I_3) = \det\begin{pmatrix} \frac{142}{50}-\lambda & -\frac{144}{50} & 0 \\ \frac{144}{50} & \frac{58}{50}-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{125}{50}-\lambda \end{pmatrix} &= (-\tfrac{125}{50}-\lambda)\det\begin{pmatrix} \frac{142}{50}-\lambda & -\frac{144}{50} \\ -\frac{144}{50} & \frac{58}{50}-\lambda \end{pmatrix} \\ = (-\tfrac{5}{2}-\lambda)\left((\tfrac{142}{50}-\lambda)(\tfrac{58}{50}-\lambda) - \tfrac{144^2}{50^2}\right) &= (-\tfrac{5}{2}-\lambda)(\tfrac{142\cdot 58-144^2}{50^2} - \tfrac{142+58}{50}\lambda + \lambda^2) \\ = (-\tfrac{5}{2}-\lambda)(-5-4\lambda+\lambda^2) = (-\tfrac{5}{2}-\lambda)(-5+\lambda)(1+\lambda) \end{aligned}$$

Damit erhalten wir als Eigenwerte $\lambda_1 = 5, \lambda 2 = -1$ und $\lambda_3 = -\frac{5}{2}$. Zur Bestimmung der zugehörigen Eigenvektoren müssen wir $\varepsilon - \lambda I = 0$ lösen; dazu multiplizieren wir zunächst jede Zeile mit 50 und erhalten das Gleichungssystem

$$\begin{array}{ccc|c} 142-50\lambda & -144 & 0 & 0 \\ -144 & 58-50\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -125-50\lambda & 0 \end{array}$$

1. Fall: $\lambda_1 = 5$ führt auf das LGS

$$\begin{array}{ccc|c} -108 & -144 & 0 & 0 \\ -144 & -192 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -325 & 0 \end{array} \rightarrow \begin{array}{ccc|c} 3 & 4 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

Also ist $x_3 = 0$ und $x_2 = -\frac{3}{4}x_1$, somit ist die Lösungsmenge $\operatorname{span}\{(-4,3,0)^\top\}$. Da $||(-4,3,0)^\top|| = 5$ ist, lautet eine normierte Richtung $d_1 = \frac{1}{5}(-4,3,0)^\top$. In dieser Richtung liegt eine starke Dehnung vor.

2. Fall: $\lambda_2 = -1$ führt auf

$$\begin{array}{ccc|c} 192 & -144 & 0 & 0 \\ -144 & 108 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -75 & 0 \end{array} \rightarrow \begin{array}{ccc|c} 4 & -3 & 0 & 0 \\ 4 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

Also ist $x_3 = 0$ und $x_2 = \frac{4}{3}x_1$, somit ist die Lösungsmenge $\operatorname{span}\{(3,4,0)^\top\}$. Da wieder $||(3,4,0)^\top|| = 5$ ist, lautet eine normierte Richtung $d_2 = \frac{1}{5}(3,4,0)^\top$. In dieser Richtung haben wir eine Kompression.

3. Fall: $\lambda_3 = -5/2$

Dann ist $-125 - 50\lambda = 0$ und nun wird die letzte Spalte zu 0, also ist $(0,0,1)^\top$ ein Eigenvektor. Wegen $||(0,0,1)^\top|| = 1$ ist $d_3 = (0,0,1)^\top$ eine passende Dehnungshauptrichtung, in welcher ebenfalls eine Kompression gemessen wurde.

Da jeweils $d_1 \cdot d_2 = 0$, $d_1 \cdot d_3 = 0$ und $d_2 \cdot d_3 = 0$, sind die vom Nullvektor verschiedenen Dehnungshauptrichtungen senkrecht aufeinander und können nicht linear abhängig sein. Damit bilden diese drei Vektoren eine Basis des $\mathbb{R}^3$.
Da der Vektor d_3 mit dem dritten Standardbasisvektor übereinstimmt, können wir die Basis $\{d_1, d_2, d_3\}$ Drehung der Standardbasis um die Drehachse d_3 auffassen. Als Winkel φ_1 zwischen d_1 und dem ersten Standardbasisvektor e_1 (bzw. e_2) berechnen wir:

$$\cos\varphi_1 = \frac{d_1 \cdot e_1}{||d_1||\,||e_1||} = \frac{-\frac{4}{5}}{1} = -\frac{4}{5}, \qquad \cos\varphi_2 = \frac{3}{5}$$

Dies entspricht etwa rund $36.9°$ bzw. $90° - 36.9° = 53.1°$.
Anmerkungen: Zur Vereinfachung der Aufgabe wurden die Werte geschönt, realistisch wird der einheitenlose Verzerrungstensor nach Multiplikation mit 10^{-6}. Dadurch erhält man dann Hauptdehnungen in der Größenordnung von maximal 10^{-4}, und dies spiegelt wieder, dass Metalle fast inkompressibel sind: Die Summe der Hauptdehnungen entspricht der relativen Volumenänderung, und sollte bei Metallen sehr, sehr klein sein.