Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Algebra und Geometrie
PD. Dr. T. Arens
M. Sc. O. Bondarenko
M. Sc. J. Patarcic

26	27	28	29	30	$\sum$

Gruppe

Karlsruhe, den 23.05.2012

Matrikel-Nr.: ....

Matrikel-Nr.: ....

6. Übungsblatt
zur Vorlesung Höhere Mathematik I für
biw/ciw/geod/mach/mage/vt

Aufgabe 26: Geben Sie zu den folgenden linearen homogenen Differentialgleichungen jeweils die allgemeine reelle Lösung an:

(a) $u^{(4)}(x) - 2u'''(x) + 5u''(x) - 8u'(x) + 4u(x) = 0,$

(b) $u'''(x) - 2u''(x) - 5u'(x) + 6u(x) = 0,$

(c) $u^{(4)}(x) - u(x) = 0.$

Aufgabe 27: Bestimmen Sie die reelle allgemeine Lösung der Differentialgleichung

(a) $x^3 y'''(x) - 3x^2 y''(x) + 7xy'(x) - 8y(x) = 0\,.$

(b) $y'''(x) + \frac{1}{x} y''(x) - \frac{2}{x^3} y(x) = 0, \quad x > 0.$

Aufgabe 28: Finden Sie die reelle allgemeine Lösung der folgenden Differentialgleichung

$$2x^2 z''(x) + 4x^2 \left[z'(x)\right]^2 + 6xz'(x) + 5 = 0, \qquad x > 0.$$

Hinweis: Benutzen Sie die Substitution $y(x) = e^{2z(x)}$.

Aufgabe 29: Bei der Bestimmung der Winkelabhängigkeit von Lösungen von Schwingungsproblemen in sphärischen Koordinaten (z.B. elektromagnetische Felder, Akustik, Elektronenorbitale) stößt man auf die Legendre'sche Differentialgleichung

$$(1 - x^2) f''(x) - 2xf'(x) + n(n+1)f(x) = 0, \quad n \in \mathbb{N}.$$

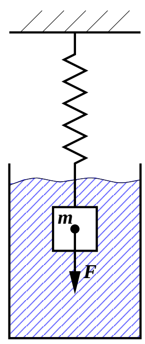
(a) Zeigen Sie, dass für $n = 1$ die Funktion $f(x) = x$ eine Lösung dieser Differentialgleichung ist.

(b) Bestimmen Sie durch *Reduktion der Ordnung* eine weitere (zu $f(x) = x$ linear unabhängige) Lösung für den Fall $n = 1$. Sie dürfen $x > 1$ annehmen.

Hinweis: Sie können die folgende Gleichungen ohne Beweis benutzen:

$$\int \frac{4x^2 - 2}{x(1-x)(1+x)}\, dx = \ln\left(\frac{1}{|x^2(1-x)(1+x)|}\right) + C, \qquad \int \frac{1}{x^2(x-1)(x+1)}\, dx = \frac{1}{x} + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) + C.$$

Aufgabe 30: Eine Masse von 5 kg dehnt eine Feder um 0.1 m. Dieses System befindet sich in einer viskosen Flüssigkeit. Durch diese Flüssigkeit wirkt auf die Masse bei einer Geschwindigkeit von 0.04 m/s eine bremsende Kraft von 2 N. Für die Erdbeschleunigung können Sie $g = 10\,\mathrm{m/s^2}$ annehmen.



Stellen Sie aus der Kräftebilanz von Federkraft $F_F(t) = -Du(t)$, Dämpfung $F_D(t) = -\sigma u'(t)$ und Massenträgheit $F_T(t) = -mu''(t)$ die zugehörige Differentialgleichung auf und bestimmen Sie deren allgemeine reelle Lösung.

Anmerkung: Wir haben als Nullpunkt die Ruhelage des Pendels gewählt. Die Gravitationskraft muss dann nicht mehr im Kräftegleichgewicht betrachtet werden, da sie durch einen Teil der Federkraft ausgeglichen wird.

Abgabetermin: Mittwoch, den 30.05.2012, 13:30 Uhr, in den Fächern bei den Seminarräumen Z1 und Z2 (01.85).

6. Tutorium
zur Vorlesung Höhere Mathematik I für biw/ciw/geod/mach/mage/vt

Aufgabe T16: Geben Sie zu den folgenden linearen homogenen Differentialgleichungen jeweils die allgemeine reelle Lösung an:

(a) $u'''(x) - 3u''(x) + 4u(x) = 0$,

(b) $u^{(4)}(x) + 4u(x) = 0$.

Aufgabe T17: Bestimmen Sie die allgemeinen reellen Lösungen der Differentialgleichungen für $x > 0$:

(a) $x^4 u''''(x) + 6x^3 u'''(x) - 2xu'(x) + 20u(x) = 0$,

(b) $u'''(x) - \frac{2}{x}u''(x) + \frac{5}{x^2}u'(x) - \frac{5}{x^3}u(x) = 0$.

Aufgabe T18: Zeigen Sie, dass die Funktion $y_1(x) = x^{-1}$ die Differentialgleichung

$$2x^2 y''(x) + 3xy'(x) - y(x) = 0, \qquad x > 0$$

löst. Finden Sie eine zweite linear unabhängige Lösung mit der Methode der Reduktion der Ordnung.

Tutorien: Donnerstag, den 24.05.2012, bis Freitag, den 25.05.2012.