Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Algebra und Geometrie
PD. Dr. T. Arens
M. Sc. O. Bondarenko
M. Sc. J. Patarcic

41	42	43	44	45	$\sum$

Gruppe

Karlsruhe, den 13.06.2012

Matrikel-Nr.: ....

Matrikel-Nr.: ....

9. Übungsblatt
zur Vorlesung Höhere Mathematik II für
biw/ciw/geod/mach/mage/vt

Aufgabe 41: Gegeben sei die folgende Differentialgleichung

$$-15u(x) + 3xu'(x) + x^2u''(x) = 8x^{-3}, \qquad x > 0.$$

(a) Geben Sie ein reelles Fundamentalsystem der zugehörigen homogenen Differentialgleichung an.

(b) Berechnen Sie eine partikuläre Lösung durch Variation der Konstanten und geben Sie die allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung an.

Aufgabe 42: Gegeben sei die Differentialgleichung

$$x^2y''(x) - 2xy'(x) + 2y(x) = x^3 \ln x, \quad x > 0.$$

Die zugehörige homogene Differentialgleichung besitzt eine Lösung der Form $y(x) = Ax + B$.

(a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des homogenen Problems durch Reduktion der Ordnung.

(b) Bestimmen Sie eine partikuläre Lösung des inhomogenen Problems mittels Variation der Konstanten.

(c) Lösen Sie das Anfangswertproblem der inhomogenen Differentialgleichung mit $y(1) = y'(1) = 1$.

Aufgabe 43: Gegeben sei die folgende Differentialgleichung

$$4u(x) - 2xu'(x) + x^3u'''(x) = 9, \quad x > 0.$$

(a) Geben Sie ein reelles Fundamentalsystem an.

(b) Berechnen Sie eine partikuläre Lösung durch Variation der Konstanten.

(c) Lösen Sie das Anfangswertproblem mit $u(1) = \frac{13}{4}$, $u'(1) = \frac{27}{4}$ und $u''(1) = \frac{50}{4}$.

Aufgabe 44: Wir lösen die Legendre'sche Differentialgleichung

$$(1 - x^2)f''(x) - 2xf'(x) + n(n+1)f(x) = 0, \quad n \in \mathbb{N}.$$

mit einem Potenzreihenansatz $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k$.

(a) Bestimmen Sie die Lösung für $n = 2$ und die Anfangswerte $f(0) = 1$ und $f'(0) = 0$.

(b) Zeigen Sie: Für gerade $n \geq 2$ und die Anfangswerte $f(0) = 1$ und $f'(0) = 0$ gilt $a_i = 0$ für alle $k > n$. Man erhält also ein Polynom n-ten Grades als Lösung (ein sogenanntes *Legendre-Polynom*).

(c) Welche Anfangswerte muss man für ungerade n wählen, damit die Potenzreihe abbricht?

Aufgabe 45: Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems

$$x(x-1)u''(x) - (x-1)u'(x) + u(x) = 2(x-1)\frac{1}{x}, \quad u(1) = 0\,, \; u'(1) = 0$$

mit einem Potenzreihenansatz um den Entwicklungspunkt $x_0 = 1$. Zeigen Sie, dass für die Koeffizienten der Potenzreihe $a_n = \frac{(-1)^n}{n-1}$ für $n \geq 2$ gilt, und bestimmen Sie den Konvergenzradius der Potenzreihe.

Hinweis: Eine passende Potenzreihenentwicklung der inhomogenen rechten Seite lässt sich mit einer Darstellung von $\frac{1}{x}$ als geometrische Reihe angeben.

Abgabetermin: Mittwoch, den 20.06.2012, 13:30 Uhr, in den Fächern bei den Seminarräumen Z1 und Z2 (01.85).

9. Tutorium
zur Vorlesung Höhere Mathematik II für
biw/ciw/geod/mach/mage/vt

Aufgabe T25: Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der folgenden Differentialgleichungen für $x > 0$

(a) $y''(x) - y(x) = x$ mit einem Ansatz vom Typ der rechten Seite,

(b) $y''(x) - y(x) = \frac{1}{x}$ durch Variation der Konstanten.

Hinweis: Das Integral $\int \frac{e^x}{x} dx$ hat keine geschlossene Darstellung. Sie dürfen es im Ergebnis so stehenlassen.

Aufgabe T26: Bestimmen Sie für die Differentialgleichung

$$x^2 y''(x) - \frac{3}{2} x y'(x) + y(x) = x^3, \quad x > 0,$$

(a) zunächst die allgemeine Lösung der zugehörigen homogenen Differentialgleichung durch Reduktion der Ordnung. Nutzen Sie, dass $y_1(x) = x^2$ die homogene Differentialgleichung löst.

(b) Bestimmen Sie eine partikuläre und die allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung durch Variation der Konstanten.

(c) Geben Sie die Lösung des Anfangswertproblems mit $y(1) = \frac{17}{5}$ und $y'(1) = \frac{21}{5}$ an.

Aufgabe T27: Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$(2 + x) y''(x) + y'(x) = 1$$

lässt sich durch eine Potenzreihe um den Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ angeben. Bestimmen Sie deren Konvergenzradius.

Tutorien: Donnerstag, den 14.06.2012, bis Freitag, den 15.06.2012.