5. Übungsblatt
Aufgaben mit Lösungen

Aufgabe 16: Bestimmen Sie die folgenden Determinanten:

$$\text{(a) } D = \begin{vmatrix} 3 & \frac{3}{7} & 2 & \pi \\ 0 & 1 & a & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{vmatrix}, \qquad \text{(b) } D = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \end{vmatrix}, \qquad \text{(c) } D = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & 3 \\ 6 & 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}.$$

Lösung 16: (a) Hier bietet sich ganz klar Entwickeln nach der ersten und dann nach der zweiten Spalte an:

$$D = \begin{vmatrix} 3 & \frac{3}{7} & 2 & \pi \\ 0 & 1 & a & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 1 & a & 4 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 3(2-3) = -3$$

(b) Wir lösen mit Gauß-Schritten:

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 4 & \boxed{2} & -1 \\ 2 & 3 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 4 & \mathbf{2} & -1 \\ 2 & 3 & 0 & 5 \\ 0 & -3 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 0 & -3 & 4 \\ \boxed{1} & 2 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 2 \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 4 \\ \mathbf{1} & 2 & 2 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} = 2(-4+3) = -2$$

(c) Eine Berechnung mit Gauß:

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 \\ \boxed{1} & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & 3 \\ 6 & 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -2 & -1 \\ \mathbf{1} & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & -4 & -3 & -5 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 3 & \boxed{1} & 4 \\ -4 & -3 & -5 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 5 & 0 & 7 \\ 3 & \mathbf{1} & 4 \\ 5 & 0 & 7 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} \boxed{5} & 7 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} = 0$$

Sobald wir zwei gleiche Zeilen oder Spalten haben, sind sie linear abhängig und die Determinante 0.

Aufgabe 17: Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & -2 \\ 2 & -1 & \alpha - 1 \\ -1 & \alpha + 1 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

Berechnen Sie die Determinante von A. Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ ist A invertierbar? Berechnen Sie A^{-1} für $\alpha = -1$.

Lösung 17: A ist genau dann invertierbar, wenn $\det(A) \neq 0$ gilt:

$$\begin{aligned} \det(A) &= \begin{vmatrix} \boxed{1} & \alpha & -2 \\ 2 & -1 & \alpha - 1 \\ -1 & \alpha + 1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{1} & \alpha & -2 \\ 0 & -1-2\alpha & \alpha + 3 \\ 0 & 1 + 2\alpha & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1-2\alpha & \alpha + 3 \\ 1 + 2\alpha & 1 \end{vmatrix} \\ &= -1 - 2\alpha - (1+2\alpha)(\alpha+3) = -(1+2\alpha)(\alpha+4) \end{aligned}$$

Für $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\{-\frac{1}{2}, -4\}$ ist A invertierbar.

Für $\alpha = -1$ verwenden wir das erweiterte Gauß-Tableau, um die Inverse zu berechnen:

$$
\begin{array}{ccc|cccccc}
1 & \boxed{-1} & -2 & 1 & 0 & 0 & \downarrow & - & \\
2 & -1 & -2 & 0 & 1 & 0 & \leftarrow & & \\
-1 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 & & & \\
\hline
1 & \mathbf{-1} & -2 & 1 & 0 & 0 & & & \\
\boxed{1} & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & \downarrow & + & \\
-1 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 & \leftarrow & & \\
\hline
1 & \mathbf{-1} & -2 & 1 & 0 & 0 & \leftarrow & & \\
\mathbf{1} & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & \uparrow & - & \\
0 & 0 & \mathbf{3} & -1 & 1 & 1 & & :3 & \\
\hline
0 & \mathbf{-1} & -2 & 2 & -1 & 0 & \leftarrow & & \\
\mathbf{1} & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & & & \\
0 & 0 & \mathbf{1} & -1/3 & 1/3 & 1/3 & \uparrow & +2 & \\
\hline
0 & \mathbf{-1} & 0 & 4/3 & -1/3 & 2/3 & & \cdot(-1) & \updownarrow \\
\mathbf{1} & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & & & \\
0 & 0 & \mathbf{1} & -1/3 & 1/3 & 1/3 & & & \\
\hline
\mathbf{1} & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & & & \\
0 & \mathbf{1} & 0 & -4/3 & 1/3 & -2/3 & & & \\
0 & 0 & \mathbf{1} & -1/3 & 1/3 & 1/3 & & &
\end{array}
$$

Damit erhalten wir $A^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -3 & 3 & 0 \\ -4 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 18: Gegeben sind die beiden Ebenen $E:\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 = 0$ und $F:\ x(\lambda,\mu) = (0,1,0)^\top + \lambda(4,1,3)^\top + \mu(4,-7,3)^\top$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Die lineare Abbildung $\Phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ sei die Spiegelung an E und die Abbildung $\Psi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ die Orthogonalprojektion auf F.

(a) Bestimmen Sie die Abbildungmatrizen A von Φ und B von Ψ. Prüfen Sie, ob A oder B orthogonal sind, und berechnen Sie die Matrixprodukte A^2 und B^2.

(b) Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren von A und B.

Lösung 18: Für beide Aufgabenteile benötigen wir die Normalenform von F:

$$F:\ 3x_1 - 4x_3 = 0.$$

(a) Der Normalenvektor auf E lautet $n = (2,-1,-2)^\top$, damit ist die Spiegelung an E gegeben durch das dyadische Produkt

$$A = I - 2\frac{nn^\top}{n^\top n} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{2}{9}\begin{pmatrix} 4 & -2 & -4 \\ -2 & 1 & 2 \\ -4 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & 4 & 8 \\ 4 & 7 & -4 \\ 8 & -4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Wir berechnen $AA^\top = I$, also ist A orthogonal. Und ferner erhalten wir durch Ausrechnen $A^2 = I$; die Matrix A ist also auch selbstinvers, nicht verwunderlich für eine Spiegelung.

Der Normalenvektor auf F lautet $m = (3,0,-4)^\top$, die Orthogonalprojektion auf F erhalten wir damit aus dem dyadischen Produkt

$$B = I - \frac{nn^\top}{n^\top n} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{25}\begin{pmatrix} 9 & 0 & -12 \\ 0 & 0 & 0 \\ -12 & 0 & 16 \end{pmatrix} = \frac{1}{25}\begin{pmatrix} 16 & 0 & 12 \\ 0 & 25 & 0 \\ 12 & 0 & 9 \end{pmatrix}.$$

Da $BB^\top = B \neq I$ gilt, ist B nicht orthogonal. Ferner ist $B^2 = B$, was eine typische Eigenschaft von Projektionen darstellt.

Es ist auch möglich die Matrizen A und B etwas aufwendiger über die Bilder der Basisvektoren zu bestimmen: Dazu ermittelt man geometrisch die Bilder der drei Basisvektoren und schreibt die Ergebnisse dann in die Spalten der Matrix.

(b) Da Φ eine Spiegelung an der Ebene E darstellt, ist $\Phi(n) = -n$ und $\Phi(x) = x$ für alle $x \perp n$, also für alle x aus E, einem zweidimensionalen Unterraum. Damit hat Φ die Eigenwerte -1 und 1 und die Eigenvektoren zum Eigenwert von -1 sind im $\operatorname{span}\{n\}$ und die Eigenvektoren zum Eigenwert 1 sind in $E = \operatorname{span}\{(1,2,0)^\top, (0,2,-1)^\top\}$.

Für die Abbildung Ψ gilt $\Psi(m) = 0$ und $\Psi(x) = x$ für alle $x \perp m$, also allen $x \in F$. Damit hat Ψ die Eigenwerte 0 und 1 mit Eigenvektoren aus $\operatorname{span}\{m\}$ und $F = \operatorname{span}\{(4,1,3)^\top, (4,-7,3)^\top\}$.

Aufgabe 19: Gegeben sei die Matrix $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 4 \\ 0 & -6 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

(a) Berechnen Sie die Eigenwerte von A.

(b) Sei $p(x) = c_3x^3 + c_2x^2 + c_1x + c_0$ das charakteristische Polynom von A. Zeigen Sie, dass $p(A) = 0$, d.h. $c_3A^3 + c_2A^2 + c_1A + c_0I_3 = 0$ ist. (Der Satz von Cayley-Hamilton besagt, dass das auch allgemein für jede quadratische Matrix und ihr charakteristisches Polynom gilt!)

(c) Bestimmen Sie aus $p(A) = 0$ die inverse Matrix A^{-1}.

Lösung 19: (a) Das charakteristische Polynom von A ist

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \det(A - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} 5-\lambda & 0 & 4 \\ 0 & -6-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (5-\lambda)\begin{vmatrix} -6-\lambda & 0 \\ 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ -6-\lambda & 0 \end{vmatrix} \\ &= (5-\lambda)(-6-\lambda)(2-\lambda) - 4(-6-\lambda) = -(\lambda+6)(\lambda-1)(\lambda-6) = -\lambda^3 + \lambda^2 + 36\lambda - 36. \end{aligned}$$

Die Eigenwerte von A sind -6, 1, 6.
(b) Aus (a) wissen wir, dass $p(\lambda) = -\lambda^3 + \lambda^2 + 36\lambda - 36$ ist, also wollen wir zeigen

$$p(A) = -A^3 + A^2 + 36A - 36I_3 \overset{!}{=} 0.$$

Nachrechnen liefert $A^2 = \begin{pmatrix} 29 & 0 & 28 \\ 0 & 36 & 0 \\ 7 & 0 & 8 \end{pmatrix}$ und $A^3 = \begin{pmatrix} 173 & 0 & 172 \\ 0 & 216 & 0 \\ 43 & 0 & 44 \end{pmatrix}$. Also erhalten wir

$$p(A) = \begin{pmatrix} -173 & 0 & -172 \\ 0 & 216 & 0 \\ -43 & 0 & -44 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 29 & 0 & 28 \\ 0 & 36 & 0 \\ 7 & 0 & 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 180 & 0 & 144 \\ 0 & -216 & 0 \\ 36 & 0 & 72 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -36 & 0 & 0 \\ 0 & -36 & 0 \\ 0 & 0 & -36 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(c) Wir formen die Gleichung $-A^3 + A^2 + 36A - 36I_3 = 0$ um:

$$\frac{1}{36}\left(-A^2 + A + 36I_3\right)A = I_3.$$

Daraus können wir schließen, dass $A^{-1} = \frac{1}{36}\left(-A^2 + A + 36I_3\right)$ ist. Die Inverse ergibt sich also zu

$$A^{-1} = \frac{1}{36}\left[\begin{pmatrix} -29 & 0 & -28 \\ 0 & -36 & 0 \\ -7 & 0 & -8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 0 & 4 \\ 0 & -6 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 36 & 0 & 0 \\ 0 & 36 & 0 \\ 0 & 0 & 36 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & -\frac{2}{3} \\ 0 & -\frac{1}{6} & 0 \\ -\frac{1}{6} & 0 & \frac{5}{6} \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 20: Gegeben sei die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

(a) Geben Sie alle Eigenwerte von A und die zugehörigen Eigenvektoren an.

(b) Geben Sie eine invertierbare Matrix P derart an, dass die Matrix $D = P^{-1}AP$ Diagonalgestalt hat, d.h. alle Einträge von D außerhalb der Diagonalen gleich Null sind.

Lösung 20:

(a) Wir bestimmen das charakteristische Polynom p von A:

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I_2) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 4 \\ 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(3-\lambda) - 8 = \lambda^2 - 4\lambda - 5 = (\lambda - 5)(\lambda + 1).$$

Hieraus können wir die Nullstellen 5 und -1 von p einfach ablesen, und diese Zahlen sind die Eigenwerte von A.

Nun ermitteln wir die Eigenvektoren von A, die zum Eigenwert 5 gehören; d.h. wir suchen diejenigen Vektoren $v = \left(\begin{smallmatrix} v_1 \\ v_2 \end{smallmatrix}\right)$ aus $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, für die $Av = 5v$ gilt. Da diese Gleichung äquivalent zu $(A - 5I_2)v = 0$, d.h.

$$\begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} v = 0$$

ist, läuft die Bestimmung der Eigenvektoren auf das Lösen dieses homogenen Gleichungssystems hinaus. Dazu berechnen wir:

$$\left(\begin{array}{cc|c} -4 & 4 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Aufgrund der zweiten Zeile können wir z.B. $v_2 = t$, für beliebiges $t \in \mathbb{R}$, setzen; und für v_1 ergibt sich dann mit der ersten Zeile ebenfalls $v_1 = t$. Somit sind die Eigenvektoren von A zum Eigenwert 5 durch $v = t\left(\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right)$ gegeben, wobei t aus $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ beliebig gewählt werden kann.

Zur Bestimmung der Eigenvektoren von A zum Eigenwert -1 gehen wir analog vor. Hier haben wir das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} v = 0$$

zu lösen. Dazu berechnen wir:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 4 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Aufgrund der zweiten Zeile können wir wieder z.B. $v_2 = t$, für beliebiges $t \in \mathbb{R}$, setzen; und für v_1 ergibt sich dann mit der ersten Zeile $v_1 = -2t$. Hier bilden demnach die Vektoren $v = t\left(\begin{smallmatrix}-2\\1\end{smallmatrix}\right)$, $t \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, die Eigenvektoren von A zum Eigenwert -1.

(b) Es sei P die Matrix, deren Spalten die oben genannten Eigenvektoren zu $t = 1$ sind: $P = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Da Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten linear unabhängig sind, ist P invertierbar. Wir berechnen

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{array}\right),$$

d.h. die Inverse zu P ist durch $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 \\ -1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$ gegeben. Eine kurze weitere Rechnung liefert dann

$$D = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 \\ -1/3 & 1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 \\ -1/3 & 1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

wie gewünscht.