8. Übungsblatt
Aufgaben mit Lösungen

Aufgabe 36: Bestimmen Sie die allgemeine reelle Lösung des Differentialgleichungssystems $u'(x) = Au(x)$ für die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 13 & -9 & -3 \end{pmatrix},$$

indem Sie das System auf eine einzelne gewöhnliche Differentialgleichung zurückführen.

Lösung 36: Zu lösen ist das Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} u_1' &= u_2 \\ u_2' &= u_3 \\ u_3' &= 13u_1 - 9u_2 - 3u_3 \end{aligned}$$

Wir können also $u_2 = u_1'$ und $u_3 = u_2' = u_1''$ in die letzte Gleichung einsetzen und erhalten die gewöhnliche lineare Differentialgleichung

$$u_1''' = 13u_1 - 9u_1' - 3u_1''$$

Mit dem Exponentialansatz $u_1(x) = \exp(\lambda x)$ finden wir das charakteristische Polynom $p(\lambda) = \lambda^3 + 3\lambda^2 + 9\lambda - 13$. Also müssen wir Nullstellen der charakteristische Gleichung $\lambda^3 + 3\lambda^2 + 9\lambda - 13 = (\lambda - 1)(\lambda + 2 + 3i)(\lambda + 2 - 3i) \stackrel{!}{=} 0$ finden. Die erste Nullstelle $\lambda_1 = 1$ raten wir. Dann teilen wir $p(\lambda)$ durch $\lambda - 1$ und erhalten

$$(\lambda^3 + 3\lambda^2 + 9\lambda - 13) = (\lambda - 1)(\lambda^2 + 4\lambda + 13) = (\lambda + 2)^2 + 9.$$

Daraus lesen wir die weiteren *komplexen* Nullstellen $\lambda_2 = -2 + 3i$ und $\lambda_3 = -2 - 3i$ ab. Somit ist die allgemeine komplexe Lösung für u_1 gegeben durch

$$u_1(x) = c_1 \exp(x) + c_2 \exp((-2 + 3i)x) + c_3 \exp((-2 - 3i)x), \quad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{C},$$

und jetzt sehen wir dass die allgemeine reelle Lösung lautet:

$$u_1(x) = \tilde{c_1} \exp(x) + \tilde{c_2} \exp(-2x) \cos 3x + \tilde{c_3} \exp(-2x) \sin 3x, \quad \tilde{c_1}, \tilde{c_2}, \tilde{c_3} \in \mathbb{R}.$$

Als Ableitungen davon erhalten wir

$$\begin{aligned} u_2(x) = u_1'(x) &= \tilde{c_1} \exp(x) + \tilde{c_2} \exp(-2x)(-2\cos 3x - 3\sin 3x) + \tilde{c_3} \exp(-2x)(-2\sin 3x + 3\cos 3x) \\ u_3(x) = u_2'(x) &= \tilde{c_1} \exp(x) + \tilde{c_2} \exp(-2x)(-5\cos 3x + 12\sin 3x) + \tilde{c_3} \exp(-2x)(-12\cos 3x - 5\sin 3x) \end{aligned}$$

Damit ist die allgemeine reelle Lösung des Differentialgleichungssystems

$$u(x) = \tilde{c_1} \exp(x) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \tilde{c_2} \exp(-2x) \begin{pmatrix} \cos 3x \\ -2\cos 3x + 3\sin 3x \\ -5\cos 3x + 12\sin 3x \end{pmatrix} + \tilde{c_3} \exp(-2x) \begin{pmatrix} \sin 3x \\ 3\cos 3x - 2\sin 3x \\ -12\cos 3x - 5\sin 3x \end{pmatrix}, \quad \tilde{c_1}, \tilde{c_2}, \tilde{c_3} \in \mathbb{R}.$$

Aufgabe 37: In dieser Aufgabe wollen wir die Dynamik des Liebesverhältnisses zwischen Romeo und Julia modellieren. Dabei bezeichnen wir mit $R(t)$ die Liebe, die Romeo gegenüber Julia empfindet, und mit $J(t)$ die Liebe, die Julia zu Romeo hegt. Die Zeit $t \geq 0$ messen wir in Tagen. Aufmerksame Beobachter haben folgende Entwicklung festgehalten:

- Von Anfang an (also ab $t = 0$) liebt Romeo seine Julia sehr: $R(0) = 4$. Allerdings ist Julia dem Romeo anfangs eher neutral eingestellt: $J(0) = 0$.

Auch in der Entwicklung ihrer Liebe zueinander unterscheiden sie sich vom Typ her.

- Für Romeo ist die Sache ganz einfach: Je mehr Julia ihn liebt, desto mehr liebt er auch sie (und natürlich umgekehrt: je weniger Julia ihn liebt, desto weniger liebt er sie). Präziser:

$$R'(t) = \frac{4}{5} J(t).$$

- Julia's Gefühle lassen sich jedoch nicht so einfach beschreiben: Ihre Liebe zu Romeo läßt sofort nach, wenn Romeo beginnt, sie mehr zu lieben. Falls sich jedoch Romeo's Gefühle abkühlen, dann fängt sie sofort an, ihn mehr zu lieben. Und zu guter Letzt wächst ihre Liebe zu ihm, je mehr sie ihn liebt. Präziser:

$$J'(t) = -\frac{1}{5} R(t) + \frac{2}{5} J(t).$$

Schon ganz erschöpft von dem ganzen Durcheinander, stellt sich Julia ein Ultimatum: Wenn am 50. Tag sie Romeo nicht liebt (d.h. falls $J(50) \leq 0$), trennt sie sich von ihm; anderenfalls will sie mit ihm bis ans Ende ihrer Tage zusammen sein. Bleiben Romeo und Julia zusammen?

Lösung 37: Es sei

$$L(t) := \begin{pmatrix} R(t) \\ J(t) \end{pmatrix}.$$

Wir suchen die Lösung des Anfangswertproblems:

$$\begin{cases} L'(t) = AL(t) \\ L(0) = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} \end{cases},$$

wobei

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{4}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}.$$

Ansatz: $L(t) = e^{\lambda t} w$, wobei λ ein Eigenwert von A ist, und w ein zugehöriges Eigenvektor. Wir bestimmen jetzt die Eigenwerte von A.

$$0 = \begin{vmatrix} -\lambda & \frac{4}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} - \lambda \end{vmatrix} \Leftrightarrow 0 = -\lambda\left(\frac{2}{5} - \lambda\right) + \frac{4}{25} \Leftrightarrow 0 = \lambda^2 - \frac{2}{5}\lambda + \frac{4}{25}$$
$$\Leftrightarrow 0 = \left(\lambda - \frac{1}{5}\right)^2 + \frac{3}{25} \Leftrightarrow 0 = \left(\lambda - \frac{1}{5} - \frac{\sqrt{3}i}{5}\right)\left(\lambda - \frac{1}{5} + \frac{\sqrt{3}i}{5}\right)$$

Die Eigenwerte von A sind also

$$\lambda_1 = \frac{1 + \sqrt{3}i}{5}, \qquad \lambda_2 = \overline{\lambda_1} = \frac{1 - \sqrt{3}i}{5}.$$

Als nächstes finden wir jeweils einen Eigenvektor für λ_1 und λ_2.

$\underline{\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{3}i}{5}}$: Wir lösen das System $(A - \lambda_1 I)w^{(1)} = 0$:

$$\left(\begin{array}{cc|c} -\frac{1+\sqrt{3}i}{5} & \frac{4}{5} & 0 \\ -\frac{1}{5} & \frac{1-\sqrt{3}i}{5} & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} -\frac{1+\sqrt{3}i}{5} & \frac{4}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Wir können einen von $w_{1,2}^{(1)}$ frei wählen. Es sei z.B. $w_2^{(1)} = 1 + \sqrt{3}i$. Dann erhalten wir: $w_1^{(1)} = 4$.

$$\Rightarrow w^{(1)} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 + \sqrt{3}i \end{pmatrix}.$$

$\underline{\lambda_2 = \frac{1-\sqrt{3}i}{5}}$:

$$\Rightarrow w^{(2)} = \overline{w^{(1)}} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 - \sqrt{3}i \end{pmatrix}.$$

Jetzt können wir die allgemeine komplexe Lösung von $L'(t) = AL(t)$ schreiben:

$$\begin{aligned} L(t) &= C_1 e^{\frac{1+\sqrt{3}i}{5}t} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 + \sqrt{3}i \end{pmatrix} + C_2 e^{\frac{1-\sqrt{3}i}{5}t} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 - \sqrt{3}i \end{pmatrix}, \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{C} \\ &= C_1 e^{\frac{1}{5}t}\left(\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{5}t\right) + i\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{5}t\right)\right)\begin{pmatrix} 4 \\ 1 + \sqrt{3}i \end{pmatrix} + C_2 e^{\frac{1}{5}t}\left(\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{5}t\right) - i\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{5}t\right)\right)\begin{pmatrix} 4 \\ 1 - \sqrt{3}i \end{pmatrix} \\ &= (C_1 + C_2)e^{\frac{1}{5}t}\begin{pmatrix} 4\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{5}t\right) \\ \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{5}t\right) - \sqrt{3}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{5}t\right) \end{pmatrix} + i(C_1 - C_2)e^{\frac{1}{5}t}\begin{pmatrix} 4\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{5}t\right) \\ \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{5}t\right) + \sqrt{3}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{5}t\right) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Also, die allgemeine reelle Lösung ist:

$$C_1 e^{\frac{1}{5}t}\begin{pmatrix} 4\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{5}t\right) \\ \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{5}t\right) - \sqrt{3}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{5}t\right) \end{pmatrix} + C_2 e^{\frac{1}{5}t}\begin{pmatrix} 4\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{5}t\right) \\ \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{5}t\right) + \sqrt{3}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{5}t\right) \end{pmatrix}, \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

Jetzt setzen wir den Anfangswert ein:

$$L(0) = C_1\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2\begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow C_1 = 1, \quad C_2 = -\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Also:

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} R(t) \\ J(t) \end{pmatrix} &= e^{\frac{1}{5}t} \begin{pmatrix} 4\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{5}t\right) \\ \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{5}t\right) - \sqrt{3}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{5}t\right) \end{pmatrix} - \frac{\sqrt{3}}{3} e^{\frac{1}{5}t} \begin{pmatrix} 4\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{5}t\right) \\ \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{5}t\right) + \sqrt{3}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{5}t\right) \end{pmatrix} \\
&= e^{\frac{1}{5}t} \begin{pmatrix} 4\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{5}t\right) - \frac{4\sqrt{3}}{3}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{5}t\right) \\ -\frac{4\sqrt{3}}{3}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{5}t\right) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Am Ende müssen wir noch $J(50)$ bestimmen:

$$J(50) = e^{10}\left(-\frac{4\sqrt{3}}{3} \underbrace{\sin\left(10\sqrt{3}\right)}_{\approx -0.99} \right) > 0.$$

Julia und Romeo bleiben also zusammen für immer.

Aufgabe 38: Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der nachstehenden Differentialgleichung in reeller Form mit einem Ansatz vom Typ der rechten Seite:

$$y''(x) - 4y'(x) + 13y(x) = 2e^{2x}\sin(3x).$$

Lösung 38: Wir betrachten zunächst die zugehörige homogene DGL und bestimmen die Nullstellen des charakteristischen Polynoms $\lambda^2 - 4\lambda + 13 = (x-2-3i)(x-2+3i)$. Dies sind komplexe Nullstellen, also haben wir die reellen Lösungen $y_1(x) = e^{2x}\sin(3x)$, $y_2(x) = e^{2x}\cos(3x)$. Somit haben wir bei dieser rechten Seite einen Resonanzfall und müssen

$$\begin{aligned}
u &= axe^{2x}\sin(3x) + bxe^{2x}\cos(3x), \\
u' &= ((2a-3b)x + a)e^{2x}\sin(3x) + ((3a+2b)x + b)e^{2x}\cos(3x), \\
u'' &= ((-5a-12b)x + (4a-6b))e^{2x}\sin(3x) + ((12a-5b)x + (6a+4b))e^{2x}\cos(3x)
\end{aligned}$$

ansetzen. Dies können wir in die Differentialgleichung einsetzen:

$$\begin{aligned}
((-5a-12b)x + (4a-6b))e^{2x}\sin(3x) + ((12a-5b)x + (6a+4b))e^{2x}\cos(3x) \\
-4((2a-3b)x + a)e^{2x}\sin(3x) - 4((3a+2b)x + b)e^{2x}\cos(3x) \\
+13axe^{2x}\sin(3x) + 13bxe^{2x}\cos(3x) &\overset{!}{=} 2e^{2x}\sin(3x) \\
\iff \quad -6be^{2x}\sin(3x) + 6ae^{2x}\cos(3x) \overset{!}{=} 2e^{2x}\sin(3x)
\end{aligned}$$

Die Lösung ist nun offensichtlich $b = -\frac{1}{3}$ und $a = 0$. Somit ist unsere Partikulärlösung

$$y_p(x) = -\frac{x}{3}e^{2x}\cos(3x)$$

und die Gesamtlösung

$$y(x) = y_p(x) + y_h(x) = -\frac{x}{3}e^{2x}\cos(3x) + \left(\alpha e^{2x}\sin(3x) + \beta e^{2x}\cos(3x)\right), \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Aufgabe 39: Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$y'''(x) + 3y''(x) + 4y'(x) - 8y(x) = (7 - 13x)e^x, \quad x \in \mathbb{R}$$

mit $y(0) = y''(0) = 2$ und $y'(0) = 0$.

Lösung 39: Wir betrachten zunächst die homogene Differentialgleichung. Der Ansatz $y(x) = e^{\lambda x}$ liefert das charakteristische Polynom

$$p(\lambda) = \lambda^3 + 3\lambda^2 + 4\lambda - 8 = (\lambda - 1)(\lambda^2 + 4\lambda + 8) = (\lambda - 1)(\lambda + 2 + 2i)(\lambda + 2 - 2i).$$

Damit haben wir die Nullstellen 1, $-2 \pm 2i$ und das reelle Fundamentalsystem

$$\left\{e^x, \sin(2x)e^{-2x}, \cos(2x)e^{-2x}\right\}.$$

Da $p(1) = 0$, also 1 eine Nullstelle ist, verwenden wir den folgenden Ansatz vom Typ der rechten Seite:

$$\begin{aligned}
y(x) &= x(a_0 + a_1x)e^x = (a_0x + a_1x^2)e^x \\
y'(x) &= (a_0 + (a_0 + 2a_1)x + a_1x^2)e^x \\
y''(x) &= ((2a_0 + 2a_1) + (a_0 + 4a_1)x + a_1x^2)e^x \\
y'''(x) &= ((3a_0 + 6a_1) + (a_0 + 6a_1)x + a_1x^2)e^x.
\end{aligned}$$

In die DGL eingesetzt ergibt dies:

$$((13a_0 + 12a_1) + (26a_1)x)e^x \stackrel{!}{=} (7 - 13x)e^x.$$

Durch Koeffizientenvergleich erhalten wir damit das System

$$\begin{array}{cc|c} 13 & 12 & 7 \\ 0 & \boxed{26} & -13 \end{array} = \begin{array}{cc|c} 13 & 0 & 13 \\ 0 & \mathbf{1} & -\frac{1}{2} \end{array}$$

Also $a_0 = 1$, $a_1 = -\frac{1}{2}$ und die partikuläre Lösung ist

$$y_p(x) = (x - \frac{x^2}{2})e^x .$$

Die allgemeine Lösung und deren Ableitungen lauten also:

$$\begin{aligned} y(x) &= (x - \frac{x^2}{2})e^x + ae^x + b\sin(2x)e^{-2x} + c\cos(2x)e^{-2x}, \\ y'(x) &= (1 - \frac{x^2}{2})e^x + ae^x + (-2b - 2c)\sin(2x)e^{-2x} + (2b - 2c)\cos(2x)e^{-2x}, \\ y''(x) &= (1 - x - \frac{x^2}{2})e^x + ae^x + 8c\sin(2x)e^{-2x} - 8b\cos(2x)e^{-2x}. \end{aligned}$$

An $x = 0$ erhalten wir damit:

$$\begin{aligned} y(0) &= a + c \stackrel{!}{=} 2 \\ y'(0) &= 1 + a + 2b - 2c \stackrel{!}{=} 0 \\ y''(0) &= 1 + a - 8b \stackrel{!}{=} 2. \end{aligned}$$

Im Gauss-Tableau berechnen wir die Lösung:

$$\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -2 & -1 \\ 1 & -8 & 0 & 1 \end{array} \rightarrow \begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & 0 & 1 & 2 \\ 0 & \boxed{2} & -3 & -3 \\ 0 & -8 & -1 & -1 \end{array} \rightarrow \begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & 0 & 1 & 2 \\ 0 & \mathbf{2} & -3 & -3 \\ 0 & 0 & \boxed{-13} & -13 \end{array}$$

$$\rightarrow \begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \mathbf{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 1 \end{array} \rightarrow \begin{array}{ccc} a & = & 1 \\ b & = & 0 \\ c & = & 1. \end{array}$$

Damit erhalten wir die Lösung des Anfangswertproblems:

$$y(x) = (1 + x - \frac{x^2}{2})e^x + \cos(2x)e^{-2x}.$$

Aufgabe 40: Bestimmen Sie die allgemeine reelle Lösung der nachstehenden Differentialgleichung mit einem Ansatz vom Typ der rechten Seite:

$$y'''(x) - 3y''(x) + 4y(x) = (x^2 + 4x + 2)e^{3x} + e^{2x}, \ x \in \mathbb{R}$$

Lösung 40: Zunächst benötigen wir die Lösung der homogenen Differentialgleichung, dazu bestimmen wir die Nullstellen des charakteristischen Polynoms $\lambda^3 - 3\lambda^2 + 4 = (\lambda - 2)^2(\lambda + 1)$. Also haben wir die Lösungen $y_1 = e^{2x}$, $y_2 = xe^{2x}$ und $y_3 = e^{-x}$. Nun haben wir auf der rechten Seite zwei Terme der Form $p(x) \cdot e^{\lambda x}$ mit einem Polynom p von Ordnung q. Zuerst berechnen wir partikuläre Lösungen fuer den ersten, dann für den zweiten Term und eine partikuläre Lösung für die gesamte Differentialgleichung ist dann wegen ihrer Linearität die Summe der beiden Lösungen. Betrachten wir zunächst

$$y''' - 3y'' + 4y = (x^2 + 4x + 2)e^{3x} .$$

Hier ist $\lambda = 3$ keine Nullstelle des charakteristischen Polynoms und das Polynom hat die Ordnung $q = 2$, also ist unser Ansatz

$$\begin{aligned} u(x) &= (ax^2 + bx + c)e^{3x} \\ u'(x) &= (3ax^2 + (2a + 3b)x + b + 3c)e^{3x} \\ u''(x) &= (9ax^2 + (12a + 9b)x + 2a + 6b + 9c)e^{3x} \\ u'''(x) &= (27ax^2 + (54a + 27b)x + 18a + 27b + 27c)e^{3x} \end{aligned}$$

und dies setzen wir in die Differentialgleichung ein:

$$\begin{array}{rcl} (27ax^2+(54a+27b)x+18a+27b+27c)e^{3x} & & \\ -3(9ax^2+(12a+9b)x+2a+6b+9c)e^{3x}+4(ax^2+bx+c)e^{3x} & = & (x^2+4x+2)e^{3x} \end{array}$$

Damit erhalten wir durch Koeffizientenvergleich das lineare Gleichungssystem für a, b und c:

$$\begin{array}{ccc|c} \boxed{4} & 0 & 0 & 1 \\ 18 & 4 & 0 & 4 \\ 12 & 9 & 4 & 2 \end{array} \quad \rightarrow \quad \begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & 0 & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & \boxed{4} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 9 & 4 & -1 \end{array} \quad \rightarrow \quad \begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & 0 & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & -\frac{1}{8} \\ 0 & 0 & 4 & \frac{1}{8} \end{array}$$

Also lautet unsere erste Partikulärlösung

$$y_{P1}(x) = (\frac{x^2}{4} - \frac{1}{8}x + \frac{1}{32})e^{3x} .$$

Nun betrachten wir

$$y'''(x) - 3y''(x) + 4y(x) = e^{2x} .$$

Hier ist $\lambda = 2$ eine Nullstelle, ein Resonanzfall, zweiter Ordnung des charakteristischen Polynoms und das Polynom hat die Ordnung $q = 0$, also ist unser Ansatz

$$\begin{array}{rcl} u(x) & = & ax^2e^{2x} \\ u'(x) & = & a(2x^2+2x)e^{2x} \\ u''(x) & = & a(4x^2+8x+2)e^{2x} \\ u'''(x) & = & a(8x^2+24x+12)e^{2x} \end{array}$$

welchen wir in die Differentialgleichung einsetzen:

$$a(8x^2+24x+12)e^{2x} - 3a(4x^2+8x+2)e^{2x} + 4ax^2e^{2x} = e^{2x} .$$

Damit erhalten wir $a = \frac{1}{6}$ und so die zweite Partikulärlösung

$$y_{P2}(x) = \frac{1}{6}x^2e^{2x} .$$

Somit lautet die Partikulärlösung für die gesamte Differentialgleichung

$$y_P(x) = (\frac{x^2}{4} - \frac{1}{8}x + \frac{1}{32})e^{3x} + \frac{x^2}{6}e^{2x}$$

und so die allgemeine Lösung

$$y(x) = (\frac{x^2}{4} - \frac{1}{8}x + \frac{1}{32})e^{3x} + \frac{x^2}{6}e^{2x} + \alpha e^{2x} + \beta xe^{2x} + \gamma e^{-x} \,,\ \alpha,\beta,\gamma \in \mathbb{R} .$$