9. Übungsblatt
Aufgaben mit Lösungen

Aufgabe 41: Gegeben sei die folgende Differentialgleichung

$$-15u(x) + 3xu'(x) + x^2u''(x) = 8x^{-3}, \qquad x > 0.$$

(a) Geben Sie ein reelles Fundamentalsystem der zugehörigen homogenen Differentialgleichung an.

(b) Berechnen Sie eine partikuläre Lösung durch Variation der Konstanten und geben Sie die allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung an.

Lösung 41:

(a) Der Ansatz ist $u(x) = x^\lambda$. Das charakteristische Polynom dieser Eulerschen Differentialgleichung ist

$$p(\lambda) = -15 + 3\lambda + \lambda(\lambda - 1) = -15 + 2\lambda + \lambda^2 = (\lambda + 1)^2 - 16 = (\lambda - 3)(\lambda + 5)$$

mit den beiden einfachen Nullstellen $\lambda_1 = 3$ und $\lambda_2 = -5$. Damit erhalten wir das reelle Fundamentalystem

$$\{x^3, x^{-5}\}.$$

(b) Den Ansatz für die partikuläre Lösung erhalten wir durch Variation der Konstanten aus der allgemeinen Lösung der homogenen Gleichung $u_h(x) = c_1x^3 + c_2x^{-5}$:

$$u_p(x) = c_1(x)x^3 + c_2(x)x^{-5}$$

Durch Ableiten erhalten wir

$$\begin{aligned} u_p'(x) &= \underbrace{c_1'(x)x^3 + c_2'(x)x^{-5}}_{\overset{!}{=}0 \text{ 1. Bedingung}} + 3c_1(x)x^2 - 5c_2(x)x^{-6}, \\ u_p''(x) &= 3c_1'(x)x^2 - 5c_2'(x)x^{-6} + 6c_1(x)x + 30c_2(x)x^{-7}. \end{aligned}$$

Die zweite Bedingung erhalten wir durch Einsetzen der partikulären Lösung in die Differentialgleichung

$$\begin{aligned} 8x^{-3} &\overset{!}{=} -15u_p(x) + 3xu_p'(x) + x^2u_p^{(2)}(x) \\ &= -15c_1(x)x^3 - 15c_2(x)x^{-5} + 9x^3c_1(x) - 15x^{-5}c_2(x) \\ &\quad + 3c_1'(x)x^4 - 5c_2'(x)x^{-4} + 6x^3c_1(x) + 30x^{-5}c_2(x) \\ &= 3c_1'(x)x^4 - 5c_2'(x)x^{-4}. \end{aligned}$$

Damit ergibt sich folgendes System für $c_1'(x)$ und $c_2'(x)$

$$\begin{aligned} c_1'(x)x^3 + c_2'(x)x^{-5} &= 0 \\ 3c_1'(x)x^4 - 5c_2'(x)x^{-4} &= 8x^{-3}. \end{aligned}$$

Einsetzen der ersten Bedingung in die Zweite liefert $c_2'(x) = -x$ und damit $c_2(x) = -x^2/2 + E$. Das ergibt $c_1'(x) = x^{-7}$ und damit $c_1(x) = -x^{-6}/6 + F$. Setzen der Konstanten E und F gleich 0 liefert eine partikuläre Lösung

$$u_p(x) = -\frac{1}{6}x^{-6}x^3 - \frac{1}{2}x^2x^{-5} = -\frac{1}{6}(x^{-3} + 3x^{-3}) = -\frac{2}{3}x^{-3}$$

und wir erhalten für die allgemeine Lösung:

$$u(x) = u_h(x) + u_p(x) = c_1x^3 + c_2x^{-5} - \frac{2}{3}x^{-3}.$$

Aufgabe 42: Gegeben sei die Differentialgleichung

$$x^2y''(x) - 2xy'(x) + 2y(x) = x^3 \ln x, \quad x > 0.$$

Die zugehörige homogene Differentialgleichung besitzt eine Lösung der Form $y(x) = Ax + B$.

(a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des homogenen Problems durch Reduktion der Ordnung.

(b) Bestimmen Sie eine partikuläre Lösung des inhomogenen Problems mittels Variation der Konstanten.

(c) Lösen Sie das Anfangswertproblem der inhomogenen Differentialgleichung mit $y(1) = y'(1) = 1$.

Lösung 42:

(a) Eine homogene Euler-Differentialgleichung löst man normalerweise mit dem Ansatz $y(x) = x^\lambda$. Ist jedoch schon eine Lösung gegeben, so kann man die zweite Lösung durch die Reduktion bestimmen. Aus dem Ansatz der Aufgabenstellung erhält man $y_1(x) = x$ als homogene Lösung; Wir wählen den Reduktionsansatz: $y(x) = xu(x)$, damit $y'(x) = u(x) + xu'(x)$ und $y''(x) = 2u'(x) + xu''(x)$. In der DGL eingesetzt haben wir die reduzierte Differentialgleichung:

$$u''(x) = 0$$

Somit ist $u(x) = cx + d,\ c, d$ beliebig. Deswegen lautet $y(x) = xu(x) = cx^2 + dx$, also ist $y_2(x) = x^2$ weitere homogene Lösung.

An der Wronskideterminante

$$W(x) = \begin{vmatrix} x & x^2 \\ 1 & 2x \end{vmatrix} = x^2 \neq 0$$

sehen wir, dass wir hier tatsächlich ein Fundamentalsystem haben.

(b) Wir verwenden das Prinzip der Variation der Konstanten mit dem Ansatz

$$y_p(x) = c_1(x)x + c_2(x)x^2\,.$$

Dies führt auf das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} c_1'(x)x + c_2'(x)x^2 &= 0 \\ c_1'(x) + c_2'(x)2x &= x\ln x \end{aligned}$$

mit der Lösung $c_1'(x) = -x\ln x$ und $c_2'(x) = \ln x$. Wir erhalten durch Integration z.B. $c_1(x) == \frac{x^2}{4}(1 - 2\ln x)$ und $c_2(x) = x\ln x - x$. Damit ist $y_p(x) = \frac{x^3}{2}\ln x - \frac{3}{4}x^3$ eine partikuläre Lösung.

(c) Setzen wir die Anfangsbedingung in die allgemeine Lösung $y(x) = C_1 x + C_2 x^2 + \frac{x^3}{2}\ln x - \frac{3}{4}x^3$ ein, so erhalten wir die eindeutige Lösung $y(x) = \frac{x^3}{4}(2\ln x - 3) + \frac{3}{4}x + x^2$.

Aufgabe 43: Gegeben sei die folgende Differentialgleichung

$$4u(x) - 2xu'(x) + x^3u'''(x) = 9, \quad x > 0.$$

(a) Geben Sie ein reelles Fundamentalsystem an.

(b) Berechnen Sie eine partikuläre Lösung durch Variation der Konstanten.

(c) Lösen Sie das Anfangswertproblem mit $u(1) = \frac{13}{4}$, $u'(1) = \frac{27}{4}$ und $u''(1) = \frac{50}{4}$.

Lösung 43: (a) Mit dem Ansatz $u(x) = x^\lambda$ lautet das charakteristische Polynom der homogenen Differentialgleichung

$$p(\lambda) = 4 - 2\lambda + \lambda(\lambda - 1)(\lambda - 2) = \lambda^3 - 3\lambda^2 + 4 = (\lambda - 2)^2(\lambda + 1)$$

mit den Nullstellen $\lambda_1 = 2$ und $\lambda_2 = -1$ und zugehörigen Vielfachheiten $k_1 = 2$ und $k_2 = 1$. Damit erhalten wir das Fundamentalsystem

$$\{x^2, \ln(x)\,x^2, x^{-1}\}.$$

(b) Die Lösung des homogenen Problems lautet für $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$

$$u_h(x) = c_1x^2 + c_2\ln(x)\,x^2 + c_3x^{-1}.$$

Damit erhalten wir durch Variation der Konstanten den folgenden Ansatz für eine partikuläre Lösung

$$u_p(x) = c_1(x)x^2 + c_2(x)\ln(x)\,x^2 + c_3(x)x^{-1}$$

mit den gesuchten Funktionen $c_1(x)$, $c_2(x)$ und $c_3(x)$. Eine Bedingung für diese Funktionen liefert die Tatsache, dass $u_p(x)$ eine Lösung der Differentialgleichung sein muss. Die fehlenden zwei Bedingungen erhalten wir durch Ableiten der partikulären Lösung

$$u_p'(x) = \underbrace{c_1'(x)x^2 + c_2'(x)\ln(x)\,x^2 + c_3'(x)x^{-1}}_{\overset{!}{=}0 \text{ 2. Bedingung}} + 2c_1(x)x + c_2(x)(x + 2\ln(x)\,x) - c_3(x)x^{-2},$$

$$u_p''(x) = \underbrace{2c_1'(x)x + c_2'(x)(x + 2\ln(x)\,x) - c_3'(x)x^{-2}}_{\overset{!}{=}0 \text{ 3. Bedingung}} + 2c_1(x) + c_2(x)(3 + 2\ln x) + 2c_3(x)x^{-3},$$

$$u_p'''(x) = 2c_1'(x) + c_2'(x)(3 + 2\ln x) + 2c_3'(x)x^{-3} + c_2(x)2x^{-1} - 6c_3(x)x^{-4}.$$

Damit ergibt sich die erste Bedingung zu

$$\begin{aligned}
9 &\overset{!}{=} 4u_p(x) - 2xu_p'(x) + x^3 u_p'''(x) \\
&= 4c_1(x)x^2 + 4c_2(x)\ln(x)\,x^2 + 4c_3(x)x^{-1} \\
&\quad - 4c_1(x)x^2 - 2c_2(x)(x^2 + 2\ln(x)\,x^2) + 2c_3(x)x^{-1} \\
&\quad + 2c_1'(x)x^3 + c_2'(x)(3+2\ln x)x^3 + 2c_3'(x) + c_2(x)2x^2 - 6c_3(x)x^{-1} \\
&= 2c_1'(x)x^3 + c_2'(x)(3+2\ln x)x^3 + 2c_3'(x).
\end{aligned}$$

Nach Division der zweiten Bedingung durch x^2 (erlaubt, da $x > 0$), der dritten Bedingung durch x und der ersten Bedingung durch x^3 erhalten wir ein lineares Gleichungssystem in Abhängigkeit von x und den Unbekannten $c_1'(x)$, $c_2'(x)$ und $c_3'(x)$:

$$\left.\begin{array}{ccc|c}
2 & 3+2\ln x & 2x^{-3} & 9x^{-3} \\
\boxed{1} & \ln x & x^{-3} & 0 \\
2 & 1+2\ln x & -x^{-3} & 0
\end{array}\right. \rightarrow
\left.\begin{array}{ccc|c}
0 & \boxed{3} & 0 & 9x^{-3} \\
\mathbf{1} & \ln x & x^{-3} & 0 \\
0 & 1 & -3x^{-3} & 0
\end{array}\right. \rightarrow
\left.\begin{array}{ccc|c}
0 & \mathbf{1} & 0 & 3x^{-3} \\
\mathbf{1} & 0 & x^{-3} & -3x^{-3}\ln x \\
0 & 0 & \boxed{-3x^{-3}} & -3x^{-3}
\end{array}\right.$$
$$\rightarrow \left.\begin{array}{ccc|c}
0 & \mathbf{1} & 0 & 3x^{-3} \\
\mathbf{1} & 0 & 0 & -3x^{-3}\ln x - x^{-3} \\
0 & 0 & \mathbf{1} & 1
\end{array}\right. .$$

Damit folgt

$$\begin{aligned}
&c_1'(x) = -3x^{-3}\ln x - x^{-3},\ c_2'(x) = 3x^{-3},\ c_3'(x) = 1 \\
&c_1(x) = \frac{3}{2}x^{-2}\ln(x) + \frac{3}{4}x^{-2} + \frac{1}{2}x^{-2} = \frac{3}{2}x^{-2}\ln(x) + \frac{5}{4}x^{-2},\ c_2(x) = -\frac{3}{2}x^{-2},\ c_3(x) = x
\end{aligned}$$

und wir erhalten

$$\begin{aligned}
u_p(x) &= c_1(x)x^2 + c_2(x)\ln(x)\,x^2 + c_3(x)x^{-1} = \frac{3}{2}\ln(x) + \frac{5}{4} - \frac{3}{2}\ln(x) + 1 \\
&= \frac{9}{4}.
\end{aligned}$$

(c)Die allgemeine Lösung und ihre Ableitungen bis zur zweiten Ordnung lauten

$$\begin{aligned}
u(x) &= u_h(x) + u_p(x) = c_1x^2 + c_2\ln(x)\,x^2 + c_3x^{-1} + \frac{9}{4}, \\
u'(x) &= 2c_1x + c_2(x + 2\ln(x)\,x) - c_3x^{-2}, \\
u''(x) &= 2c_1 + c_2(3 + 2\ln x) + 2c_3x^{-3}.
\end{aligned}$$

Damit ergeben sich folgende drei Gleichungen aus den Anfangsbedingungen:

$$\begin{aligned}
u(1) &= c_1 + c_3 + \frac{9}{4} = \frac{13}{4}, \\
u'(1) &= 2c_1 + c_2 - c_3 = \frac{27}{4}, \\
u''(1) &= 2c_1 + 3c_2 + 2c_3 = \frac{50}{4}.
\end{aligned}$$

Damit erhalten wir folgendes Gleichungssystem

$$\left.\begin{array}{ccc|c}
\boxed{1} & 0 & 1 & 1 \\
2 & 1 & -1 & \frac{27}{4} \\
2 & 3 & 2 & \frac{50}{4}
\end{array}\right. \rightarrow
\left.\begin{array}{ccc|c}
\mathbf{1} & 0 & 1 & 1 \\
0 & 1 & -3 & \frac{19}{4} \\
0 & \boxed{3} & 0 & \frac{21}{2}
\end{array}\right. \rightarrow
\left.\begin{array}{ccc|c}
\mathbf{1} & 0 & 1 & 1 \\
0 & 0 & \boxed{-3} & \frac{5}{4} \\
0 & \mathbf{1} & 0 & \frac{7}{2}
\end{array}\right. \rightarrow
\left.\begin{array}{ccc|c}
\mathbf{1} & 0 & 0 & \frac{17}{12} \\
0 & 0 & \mathbf{1} & -\frac{5}{12} \\
0 & \mathbf{1} & 0 & \frac{7}{2}
\end{array}\right.$$

mit der Lösung $c_1 = \frac{17}{12}$, $c_2 = \frac{7}{2}$ und $c_3 = -\frac{5}{12}$ und damit die Lösung des Anfangswertproblems

$$u(x) = \frac{17}{12}x^2 + \frac{7}{2}\ln(x)\,x^2 - \frac{5}{12}x^{-1} + \frac{9}{4}.$$

Aufgabe 44: Wir lösen die Legendre'sche Differentialgleichung

$$(1 - x^2)f''(x) - 2xf'(x) + n(n+1)f(x) = 0, \quad n \in \mathbb{N}.$$

mit einem Potenzreihenansatz $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k$.

(a) Bestimmen Sie die Lösung für $n = 2$ und die Anfangswerte $f(0) = 1$ und $f'(0) = 0$.

(b) Zeigen Sie: Für gerade $n \geq 2$ und die Anfangswerte $f(0) = 1$ und $f'(0) = 0$ gilt $a_i = 0$ für alle $k > n$. Man erhält also ein Polynom n-ten Grades als Lösung (ein sogenanntes *Legendre-Polynom*).

(c) Welche Anfangswerte muss man für ungerade n wählen, damit die Potenzreihe abbricht?

Lösung 44: Wir setzen den Ansatz in die DGL ein und erhalten

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=2}^{\infty}(1-x^2)k(k-1)a_k x^{k-2} - \sum_{k=1}^{\infty} 2x\,k a_k x^{k-1} + \sum_{k=0}^{\infty} n(n+1)a_k x^k \stackrel{!}{=} 0 \\
\Leftrightarrow\quad & \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)a_k x^{k-2} - \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)a_k x^k - \sum_{k=1}^{\infty} 2k a_k x^k + \sum_{k=0}^{\infty} n(n+1)a_k x^k = 0 \\
\underset{j=k-2}{\Leftrightarrow}\quad & \sum_{j=0}^{\infty}(j+2)(j+1)a_{j+2}x^j = \sum_{k=2}^{\infty}\big((k(k-1)+2k-n(n+1)\big)a_k x^k + 2a_1 x - n(n+1)a_1 x - n(n+1)a_0
\end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich ergibt $a_2 = \frac{-n(n+1)}{2}a_0$ und $a_3 = \frac{2-n(n+1)}{6}a_1$ sowie

$$a_{k+2} = \frac{k(k-1)+2k-n(n+1)}{(k+2)(k+1)}a_k = \frac{k(k+1)-n(n+1)}{(k+2)(k+1)}a_k \qquad \text{für } k \geq 2$$

(a) Für $n = 2$ ist $n(n+1) = 6$. Mit $f(0) = a_0 = 1$ und $f'(0) = a_1 = 0$ erhalten wir also $a_2 = \frac{-6}{2}a_0 = -3$, $a_3 = \frac{-4}{6}a_1 = 0$, $a_4 = \frac{0}{4\cdot 3}a_2 = 0$. Man sieht nun mit vollständiger Induktion, dass für $k \geq 3$ immer $a_k = 0$ gilt (Induktionsanfang: gilt für $k = 3$ und $k = 4$; Induktionsschritt: wenn die Behauptung für $k-2$ gilt, dann auch für k laut Rekursionsvorschrift).

Die Lösung ist damit $f(x) = 1 - 3x^2$.

(b) Für $f'(0) = a_1 = 0$ gilt $a_k = 0$ für alle ungeraden $k \geq 1$ (Induktion mit Rekursionsvorschrift wie in (a)).

Für $k = n$ erhalten wir $a_{n+2} = \frac{0}{(n+2)(n+1)}a_k = 0$. Damit erhalten wir $a_k = 0$ auch für alle geraden $k \geq n+2$ (wieder mit Induktion über die Rekursionsvorschrift).

(c) Ist n ungerade, so erhält man $a_{n+2} = 0$ wie in (b), also $a_k = 0$ für alle ungeraden $k \geq n+2$. Damit man auch $a_k = 0$ für die geraden k bekommt, braucht man $a_0 = 0$. Also muss man als Anfangswert $f(0) = 0$ wählen, damit die Potenzreihe abbricht. Der Anfangswert $f'(0)$ kann beliebig gewählt werden.

Aufgabe 45: Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems

$$x(x-1)u''(x) - (x-1)u'(x) + u(x) = 2(x-1)\frac{1}{x}\,, \quad u(1) = 0\,,\ u'(1) = 0$$

mit einem Potenzreihenansatz um den Entwicklungspunkt $x_0 = 1$. Zeigen Sie, dass für die Koeffizienten der Potenzreihe $a_n = \frac{(-1)^n}{n-1}$ für $n \geq 2$ gilt, und bestimmen Sie den Konvergenzradius der Potenzreihe.
Hinweis: Eine passende Potenzreihenentwicklung der inhomogenen rechten Seite lässt sich mit einer Darstellung von $\frac{1}{x}$ als geometrische Reihe angeben.
Lösung 45: Zunächst bestimmen wir eine Entwicklung der rechten Seite um $x_0 = 1$ mit Hilfe der geometrischen Reihe,

$$2\frac{x-1}{x} = 2(x-1)\frac{1}{1+(x-1)} = 2(x-1)\sum_{n=0}^{\infty}(-(x-1))^n = \sum_{n=1}^{\infty}2(-1)^{n-1}(x-1)^n\,.$$

Einsetzen des Potenzreihenansatzes $u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-1)^n$ in die Differentialgleichung führt auf

$$\begin{aligned}
&x(x-1)\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n(x-1)^{n-2} - (x-1)\sum_{n=1}^{\infty} n a_n(x-1)^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-1)^n \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} 2(-1)^{n-1}(x-1)^n
\end{aligned}$$

bzw.

$$(1+x-1)\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n(x-1)^{n-1} - \sum_{n=1}^{\infty} n a_n(x-1)^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-1)^n = \sum_{n=1}^{\infty} 2(-1)^{n-1}(x-1)^n\,.$$

Eine Indexverschiebung liefert

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n(x-1)^n + \sum_{n=1}^{\infty}(n+1)na_{n+1}(x-1)^n - \sum_{n=1}^{\infty} na_n(x-1)^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-1)^n$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} 2(-1)^{n-1}(x-1)^n \,.$$

Fassen wir die Terme zusammen, so ergibt sich

$$a_0 + 2a_2(x-1) + \sum_{n=2}^{\infty} \left[(n+1)na_{n+1} + (n-1)^2 a_n\right](x-1)^n = \sum_{n=1}^{\infty} 2(-1)^{n-1}(x-1)^n$$

und ein Koeffizientenvergleich führt auf die Rekursionsgleichungen

$$a_0 = 0, \quad 2a_2 = 2, \quad a_{n+1} = \frac{2(-1)^{n-1} - (n-1)^2 a_n}{n(n+1)}$$

zusammen mit den beiden Bedingungen $a_0 = 0$ und $a_1 = 0$, die sich aus den Anfangsbedingungen ergeben.
Wir zeigen induktiv, dass $a_n = \frac{(-1)^n}{n-1}$ für $n \geq 2$ gilt. Der Induktionsanfang $a_2 = 1$ lässt sich direkt ablesen. Nehmen wir nun an, dass für ein $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ die Identität $a_n = \frac{(-1)^n}{n-1}$ gilt, dann folgt mit der Rekursionsformel

$$a_{n+1} = \frac{2(-1)^{n-1} - (n-1)^2 \frac{(-1)^n}{n-1}}{n(n+1)} = \frac{(-1)^{n-1}(2+(n-1))}{n(n+1)} = \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

Damit ist die Induktion abgeschlossen.
Mit dem Quotientenkriterium erhalten wir aus

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{n-1}{n}|x-1| \to |x-1| \quad \text{für } n \to \infty$$

den Konvergenzradius $r = 1$ dieser Potenzreihe. Übrigens mit der bekannten Potenzreihe zum Logarithmus ist ersichtlich, dass $u(x) = (x-1)\ln x$ die Lösung des Anfangswertproblems ist.