Aufgabe 4

$$A_t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 \\ -1 & 0 & -t & -1 \\ -2 & t+2 & 4 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & t+4 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}$$

$$y = (1, 0, 2, -1)^T, \quad b = (-6, 2, 7, -6)^T$$

a) Für welche $t \in \mathbb{R}$ hat das LGS $A_t x = 0$ nur die triviale Lösung?

b) Welche Dimension (in Abh. v. t) hat der Lösungsraum von $A_t x = 0$?

c) Geben Sie allg. Lsg. des LGS $A_{-1} x = b$ an

Lösung: a) Idee: $\det(A_t) \neq 0 \Leftrightarrow A_t$ regulär $\Leftrightarrow A_t x = 0$ hat nur triv. Lsg.

$$\begin{vmatrix} 1^{+} & 0^{-} & -2 & 3 \\ -1 & 0^{+} & -t & -1 \\ -2 & t+2^{-} & 4 & -1 \\ 1 & 0^{+} & -2 & t+4 \end{vmatrix} = -(t+2) \begin{vmatrix} \boxed{1} & -2 & 3 \\ -1 & -t & -1 \\ 1 & -2 & t+4 \end{vmatrix}$$

$$= -(t+2) \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & -(t+2) & 2 \\ 0 & 0 & t+1 \end{vmatrix} = (t+2)^2 (t+1)$$

Also $\det(A_t) \neq 0 \Leftrightarrow \underline{\underline{t \notin \{-2, -1\}}}$

b) aus a): $t \notin \{-2,-1\}$ ~~$\Rightarrow \det A_t$~~

$\Rightarrow \dim = 0$

<u>Fall 2</u>: $t=-1$ betrachte LGS $A_{-1}x = 0$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 0 & -2 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 4 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 3 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} 1 \\ (-1) \end{array} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

x_4 freie Variable z.B. $x_4 = s \in \mathbb{R}$

$\overset{II}{\rightsquigarrow} x_3 = 2s \quad \overset{I}{\rightsquigarrow} x_1 = -3s + 4s = s$

$\overset{III}{\rightsquigarrow} x_2 = s - 8s + 2s = -5s$

Lösungsraum: $\mathcal{L} = \left\{ s \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, s \in \mathbb{R} \right\} \rightsquigarrow \dim = 1$

<u>Fall 3</u>: $t = -2$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 0 & -2 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 4 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 2 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} 1 \\ (-1) \end{array}$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow x_4 = 0$$

$x_3 = s$ freie Variable $\rightsquigarrow$ I / III : $x_1 = 2s$

$x_2 = t$ weitere freie Variable

$$\mathcal{L} = \left\{ s\begin{pmatrix}2\\0\\1\\0\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix},\ s,t \in \mathbb{R} \right\},\ \dim = 2$$

c) Rechne [illegible] nach: $A_{-1}\,y = b$

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & -2 & 3\\ -1 & 0 & 1 & -1\\ -2 & 1 & 4 & -1\\ 1 & 0 & -2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\2\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-6\\2\\7\\-6\end{pmatrix} = b \checkmark$$

also y ist <u>eine</u> Lsg v. $A_{-1}x = b$

alle Lsg. des inhom LGS $A_{-1}x = b$ setzen sich aus <u>den Lsg des hom. LGS</u> und <u>einer partikulären Lsg. des inhom LGS</u> $A_{-1}x = b$ zusammen

$$\text{also: } \mathcal{L} = \left\{ s\begin{pmatrix}1\\-5\\2\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\0\\2\\-1\end{pmatrix},\ s \in \mathbb{R} \right\}$$

[illegible] 2 Lsg. $x^{(1)} = s_1\begin{pmatrix}1\\-5\\2\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\0\\2\\-1\end{pmatrix}$

$$x^{(2)} = s_2\begin{pmatrix}1\\-5\\2\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\0\\2\\-1\end{pmatrix}$$

$x^{(1)} - x^{(2)} = (s_1 - s_2)\begin{pmatrix}1\\-5\\2\\1\end{pmatrix} \rightsquigarrow$ Lsg. [illegible] des hom LGS