Aufgabe 2 (2. Übung, HM II)

$u, v, w, z \in \mathbb{R}^4$

$u = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ a \\ -1 \end{pmatrix} \quad w = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ a \end{pmatrix} \quad z = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad a \in \mathbb{R}$

Bestimmen Sie a so, dass u, v, w, z lin. unabh. sind.

Lösung:

$\alpha_1 u + \alpha_2 v + \alpha_3 w + \alpha_4 z = 0$

Table

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & a & -1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \mid :2 \\ \\ + \end{array}$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2+a & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \cdot(-2) \\ \\ + \\ \\ \end{array}$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a-2 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a+2 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \cdot \frac{3}{a+2}, \quad + \cdot \frac{-2}{a+2} \qquad (a \neq 2)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a-2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a+2 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad + \cdot \frac{-1}{a-2} \qquad (a \neq -2)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a-2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a+2 & 0 & 0 \end{array}\right) \qquad (*)$$

$\Rightarrow$ für $a \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$ hat das LGS nur die triviale Lösung!

$\Rightarrow$ (u, v, w, z) sind linear unabhängig.

Nun untersuchen wir noch $a = 2$ und $a = -2$:

$\underline{a=2}$ in (*)

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{array}{l} \alpha_4 = 0 \\ \alpha_1 = 0 \\ 4\alpha_3 = 0 \Leftrightarrow \alpha_3 = 0 \\ \alpha_2 \in \mathbb{R} \end{array}$$

$\Rightarrow$ unendlich viele Lsgen!

$\underline{a=-2}$ in (*)

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

genauso unendlich viele Lösungen!