Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Algebra und Geometrie
PD Dr. F. Hettlich
Dipl.-Math. J. Stompe
Dipl.-Math.techn. T. Henn

56	57	58	59	60	$\sum$

Gruppe

Karlsruhe, den 4. Juli 2013

Matrikel-Nr.: ....

Matrikel-Nr.: ....

12. Übungsblatt zur Vorlesung Höhere Mathematik II für biw/ciw/mach/mage/vt

Aufgabe 56: Bestimmen Sie die Faltung $f * g$ für die Funktionen

$$f(t) = t^2 \qquad \text{und} \qquad g(t) = 1 - H(t-1), \qquad \text{wobei } H(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \text{ die Heaviside-Funktion ist.}$$

Berechnen Sie außerdem $\mathcal{L}(f * g)$ und vergleichen Sie das Ergebnis mit $\mathcal{L}f \cdot \mathcal{L}g$.

Aufgabe 57: Bestimmen Sie die Lösung $f(x)$ der Volterraschen Integralgleichung

$$f(x) - 2\int_0^x \cos(x-y) f(y) dy = e^x$$

mit Hilfe der Laplace-Transformation. Hinweis: Der Faltungssatz könnte nützlich sein.

Aufgabe 58:

(a) Gegeben ist die Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1 \cos(x_2)\cos(x_3)\,, \quad x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}.$$

Berechnen Sie den Gradienten $\nabla f(x)$ und die Hessematrix $H_f(x) = \left(\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_j \partial x_i}\right)_{i,j=1,2,3}$ (d.h. die Matrix, deren Einträge die zweiten partiellen Ableitungen von f sind).

(b) Berechnen Sie die Funktionalmatrix zu

$$f(x,y) = \begin{pmatrix} f_1(x,y) \\ f_2(x,y) \\ f_3(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos x - \ln(1+y^2) \\ \tan e^{-y^2} \\ \sinh(xy^2) \end{pmatrix}, \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

Aufgabe 59: Herr K. wandert durch den Hochschwarzwald, dessen Topographie durch die Funktion

$$f(x,y) = x^2 y - xy^2 + 3xy - 5x^2 + 10x + 5y^2 - 40y + 500$$

gegeben ist, wobei $x, y \in [0, 10]$ Koordinaten (in Kilometern) sind und $f(x,y)$ die Höhenmeter angibt. In den ersten zwei Stunden, $t \in [0,2]$ in Stunden, verläuft sein Wanderweg entlang des Wegs $c(t) = (x,y)^\top = (4t - t^2, 6 - 2t)^\top$.

(a) Bestimmen Sie den Gradienten von f.

(b) Zeigen Sie, dass $x = 5$ und $y = 5$ zwei Höhenlinien sind dadurch, dass Sie ausrechnen, dass f dort konstant ist. Zeigen Sie auch, dass der Gradient senkrecht auf den Höhenlinien steht.

(c) Bestimmen Sie sowohl Herrn K.s Wandergeschwindigkeit $\|c'(t)\|$ als auch seine Wanderrichtung $r(t) = \frac{1}{\|c'(t)\|} c'(t)$ zum Zeitpunkt t. Berechnen Sie den Anstieg des Wanderwegs zu $t = 1$, also die Richtungsableitung von f in Wanderrichtung an $c(1)$.

Der Wanderweg:

(d) Berechnen Sie die Ableitung der Funktion $f \circ c$ mit Hilfe der Kettenregel. Was ist Herrn K.s Anstiegsgeschwindigkeit zu $t = 1$?

Aufgabe 60: Bestimmen Sie die Ableitung der Funktion $f : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(s) := \int\limits_{1/s}^{s^2} \frac{\sin(st)}{t}\, dt\,,$$

indem Sie partielle Ableitungen von $g(x, y, z) = \int\limits_x^y \frac{\sin(zt)}{t}\, dt$ und die Kettenregel verwenden.

Abgabetermin: Montag, den 15. Juli 2013, 12:00 Uhr, in den Abgabekästen bei Seminarraum Z1 im Gebäude 01.85 (Fritz-Erler-Str. 1–3).

12. Tutorium
zur Vorlesung Höhere Mathematik II für
biw/ciw/mach/mage/vt

Aufgabe T34: Berechnen Sie das Faltungsprodukt $f(t) * g(t)$, $t \in [0, \infty)$, der Funktionen

(a) $f(t) = t,\ g(t) = t\cos t,\ t \in [0, \infty)$,

(b) $f(t) = \sin(t), \qquad g(t) = \begin{cases} 0, & 0 \le t < 3, \\ 2, & t \ge 3. \end{cases}$

Aufgabe T35:

(a) Berechnen Sie die Ableitung (d.h. die Jacobimatrix) $f'(x)$ und den Gradienten ∇f für die Funktion

$$f(x_1, x_2, x_3) := \frac{x_1}{\cos(x_1 + x_2 + 2x_3)}.$$

(b) Was ist die Ableitung der Funktion

$$g(x_1, x_2, x_3) := \frac{(x_1, x_2, x_3)^\top}{1 + x_1 + x_2 + x_3}\ ?$$

Aufgabe T36:

(a) Bestimmen Sie die partiellen Ableitungen der durch ein Parameterintegral gegebene Funktion

$$F(x, y) = \int_1^{\sqrt{x}} \frac{1}{\tau} \cos(\tau^2 y \pi) d\tau, \quad x, y \ge 1\,.$$

(b) Berechnen Sie den Wert $g'(2)$ von der Funktion $g(t) = \int_1^{\sqrt{t}} \frac{1}{\tau} \cos(\tau^2 t^2 \pi) d\tau, \quad t \ge 1\,.$

Hinweis: Benutzen Sie $g(t) = F(t, t^2)$ und die Kettenregel.

Alle aktuellen Informationen zur Veranstaltung finden Sie im Internet unter
`http://www.math.kit.edu/iag1/lehre/hm2mach2013s/`

Tutorien: Montag, den 8. Juli 2013, bis Mittwoch, den 10. Juli 2013.