Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Algebra und Geometrie
PD Dr. F. Hettlich
Dipl.-Math. J. Stompe
Dipl.-Math.techn. T. Henn

6	7	8	9	10	$\sum$

Gruppe

Karlsruhe, den 25.04.2013

Matrikel-Nr.: ....

Matrikel-Nr.: ....

2. Übungsblatt
zur Vorlesung Höhere Mathematik II für biw/ciw/mach/mage/vt

Aufgabe 6: Gegeben sind die folgenden Vektoren aus dem $\mathbb{R}^3$,

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad v = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \qquad w = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

(a) Stellen Sie den Vektor $x = (-3, 4, 7)^\top$ als Linearkombination von u, v und w dar.

(b) Sind u, v und w linear unabhängig?

(c) Sei ferner $y = (1, 0, 1)^\top$. Bildet die Menge $\{u, v, y\}$ eine Basis des $\mathbb{R}^3$?

Aufgabe 7: Prüfen Sie jeweils, ob die angegebenen Vektoren linear unabhängig sind, und bestimmen Sie jeweils die Dimension von $\operatorname{span}\{u, v, w\}$.

(a) $u = (-1, 4)^\top,\ v = (2, 8)^\top,\ w = (3, 4)^\top$,

(b) $u = (-1, 4, 3)^\top,\ v = (1, 5, 2)^\top,\ w = (2, 1, 2)^\top$,

(c) $u = (-1, 4, 3)^\top,\ v = (1, 5, 2)^\top,\ w = (2, 1, -1)^\top$.

Aufgabe 8: Untersuchen Sie folgende Vektoren auf lineare Unabhängigkeit

$$u = \begin{pmatrix} 1+i \\ 3i-3 \end{pmatrix}, \qquad v = \begin{pmatrix} 1+3i \\ -9+3i \end{pmatrix}$$

(a) in $\mathbb{C}^2$ über $\mathbb{C}$.

(b) in $\mathbb{C}^2$ über $\mathbb{R}$.

Hinweis: (Bemerkung aus Skript S.5)
Der Raum $\mathbb{C}^1 = \mathbb{C}$ ist einerseits ein $\mathbb{C}$-Vektorraum. Andererseits können wir uns auch auf die Multiplikation nur mit reellen Zahlen einschränken, also $\mathbb{C}$ als $\mathbb{R}$-Vektorraum betrachten. Dann entspricht $\mathbb{C}$ dem $\mathbb{R}^2$.

Aufgabe 9: Für welche Werte der Parameter $a, b \in \mathbb{R}$ sind die Vektoren

$$u = \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ b \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

linear abhängig?

Aufgabe 10: Es bezeichne P_n den Vektorraum der reellen Polynome bis zum Grad n.

(a) Man zeige: $e_k := (1+x)^k$, $k = 0, 1, 2, 3$ bilden eine Basis von P_3. Welche Dimension hat dieser Raum?

(b) Man stelle das Polynom $y = x^3 + 2x^2 + 1$ als Linearkombination der „Basisvektoren“ e_k, $k = 0, 1, 2, 3$ dar.

Hinweis: Der „Nullvektor“ in P_3 hat die Darstellung $0 \cdot x^3 + 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x + 0$.

Abgabetermin: Montag, den 06.05.2013, 12:00 Uhr, in den Abgabekästen bei Seminarraum Z1 im Gebäude 01.85 (Fritz-Erler-Str. 1–3).

2. Tutorium
zur Vorlesung Höhere Mathematik II für
biw/ciw/mach/mage/vt

Aufgabe T4: Gegeben sind die Vektoren $u = (-2, 3, 1, 5)^\top$, $v = (1, 1, 2, 3)^\top$, $w = (-7, 3, -4, 1)^\top \in \mathbb{R}^4$.

(a) Bilden Sie die Linearkombinationen $u + v + w$, $u - 3v + w$, $3u - 2v$, $2u - 3v - w$.

(b) Zeigen Sie, dass je zwei der Vektoren linear unabhängig sind.

(c) Sind die drei Vektoren linear unabhängig? Bestimmen Sie die Dimension von $\operatorname{span}\{u, v, w\}$.

Aufgabe T5: Weisen Sie nach, dass die Vektoren

$$u = (1, 2, 0)^\top, \quad v = (0, 1, 0)^\top, \quad w = (1, 1, 1)^\top$$

eine Basis B des $\mathbb{R}^3$ bilden. Stellen Sie die Vektoren

$$a = (1, 2, 3)^\top \quad \text{und} \quad b = (3, 2, 2)^\top$$

als Linearkombination von u, v, w dar. Geben Sie die Koordinaten von a und b bezüglich der Basis B an.

Aufgabe T6:

(a) Prüfen Sie jeweils, ob die angegebenen Vektoren linear unabhängig sind.

(i) $u = (1, 1, 0)^\top$, $v = (1, 0, 1)^\top$, $w = (0, 1, 1)^\top$;
(ii) $u = (1, 2, 3)^\top$, $v = (2, 3, 4)^\top$, $w = (3, 4, 5)^\top$;
(iii) $u^1 = (5, 0, 5, -4)^\top$, $u^2 = (0, 5, -5, -3)^\top$, $u^3 = (5, -5, 10, -1)^\top$, $u^4 = (-4, -3, -1, 5)^\top$.

(b) Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ sind die Vektoren $(2, 1, 3)^\top$, $(1, -1, 2)^\top$ und $(-\alpha, 4, -3)^\top$ linear abhängig? Stellen Sie für diese α den letzten Vektor als Linearkombination der ersten beiden dar.

Alle aktuellen Informationen zur Veranstaltung finden Sie im Internet unter
`http://www.math.kit.edu/iag1/lehre/hm2mach2013s/`

Tutorien: Montag, den 29.04.2013, bis Mittwoch, den 01.05.2013.