Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Algebra und Geometrie
PD Dr. F. Hettlich
Dipl.-Math. J. Stompe
Dipl.-Math.techn. T. Henn

11	12	13	14	15	$\sum$

Gruppe

Karlsruhe, den 02.05.2013

Matrikel-Nr.: ....

Matrikel-Nr.: ....

3. Übungsblatt zur Vorlesung Höhere Mathematik II für biw/ciw/mach/mage/vt

Aufgabe 11: Gegeben sind zwei Teilmengen von $\mathbb{R}^3$: $E := \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 - x_3 = 0\}$, und F ist eine Ebene durch die Punkte $A = (4|0|0)$, $B = (3|0|1)$ und $C = (2|1|0)$.

(a) Stellen Sie diese Mengen in Parameterform dar.

(b) Bestimmen Sie die Schnittmenge $G = E \cap F$.

(c) Welche der Mengen G, E, F ist ein Unterraum von $\mathbb{R}^3$? Begründen Sie ihre Antwort.

Aufgabe 12: Gegeben sind die Gerade G und die Menge E in $\mathbb{R}^4$ durch $G:\ x = (0,1,0,-2)^\top + \lambda\,(2,2,1,0)^\top\ ,\ \lambda \in \mathbb{R}\,,\quad E:\ 3x_1 + 4x_4 = 4\,.$

(a) Bestimmen Sie die Schnittmenge von G und E.

(b) Geben Sie die Menge F der Form $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4 = c$ an, die den Punkt $(1|0|0|0)$ enthält und senkrecht zu G ist.

(c) Bestimmen Sie alle Punkte auf G, die von der Menge E den gleichen Abstand wie von der Menge F aus Aufgabenteil (b) haben.

Aufgabe 13: Betrachten Sie die Ebene $E:\ x(s,t) = (3,1,0)^\top + s(1,-1,2)^\top + t(0,0,2)^\top$ und die beiden Geraden $G:\ x(u) = (4,1,0)^\top + u(0,1,0)^\top$ und $H:\ x(v) = (3,3,3)^\top + v(2,-2,1)^\top$.

(a) Berechnen Sie Schnittmengen der beiden Gerade mit E sowie die Abstände der beiden Geraden zu E.

(b) Bestimmen Sie die Orthogonalprojektionen von G und H auf E.

Aufgabe 14: Gegeben sind die Gerade $G:\ x(s) = (5,1,-1)^\top + s(4,0,-3)^\top,\ s \in \mathbb{R}$, sowie die Punkte $P = (2|0|2)$ und $Q = (0|2|2)$.

(a) Bestimmen Sie eine Parameterdarstellung der Geraden H, die durch P und Q verläuft.

(b) Bestimmen Sie den Punkt R auf G so, dass die Ebene E_1 durch P, Q und R parallel ist zur Ebene E_2, die durch $2x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0$ beschrieben ist. Welchen Abstand haben die Ebenen von einander?

(c) Unter welchem Winkel schneidet G die beiden Ebenen?

Aufgabe 15: Gegeben ist die Gerade

$$G = \left\{ x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Bestimmen Sie alle Ebenen $E \subseteq \mathbb{R}^3$ in Normalform, die G enthalten und den Abstand $\sqrt{2}$ vom Ursprung haben.

Abgabetermin: Montag, den 13.05.2013, 12:00 Uhr,in den Abgabekästen bei Seminarraum Z1 im Gebäude 01.85 (Fritz-Erler-Str. 1–3).

3. Tutorium
zur Vorlesung Höhere Mathematik II für
biw/ciw/mach/mage/vt

Aufgabe T7: Gegeben seien die Ebene $E : 4x_1 + x_3 + 8 = 0$, der Punkt $P = (2|1|1)$ und die Gerade $H : x(\lambda) = (4, 3, -2)^\top + \lambda(3, 1, -1)^\top$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

(a) Bestimmen Sie eine Gerade durch den Punkt P, die senkrecht auf E steht.

(b) Bestimmen Sie den Abstand von P zu E und den Punkt Q auf E, der P am nächsten ist.

(c) Bestimmen Sie den Schnittpunkt der Geraden H mit E und den Punkt R auf H, der von P den geringsten Abstand hat.

Aufgabe T8: Gegeben seien die Ebenen

$$E : x_1 - x_3 = 0 \qquad \text{und} \qquad F : x_1 + 2x_2 + x_3 = 4.$$

(a) Bestimmen Sie die Schnittgerade G von E und F.

(b) Für eine weitere Gerade H, die nicht in E oder F liegt, gibt es folgende Möglichkeiten:

- sie schneidet sowohl E als auch F in jeweils genau einem Punkt (unter welchen Winkeln?),
- sie schneidet eine der beiden Ebenen in einem Punkt, die andere aber gar nicht,
- sie schneidet keine der beiden Ebenen.

Finden Sie für jede dieser Möglichkeiten ein Beispiel und machen Sie sich jeweils die geometrische Lage der Ebenen und der Gerade zueinander klar.

Aufgabe T9: Gegeben seien die Punkte $P = (2|1|0)$, $Q = (1|3|-1)$ und $R = (0|2|0)$.

(a) Bestimmen Sie eine Parameterdarstellung und Normalform der Ebene E auf den Punkten P, Q, R.

(b) Schneidet die Gerade $G : x(u) = (-2, -7, 0)^\top + u(3, 2, 1)^\top$, $u \in \mathbb{R}$, die Ebene E? Wenn ja, bestimmen Sie Schnittpunkt und Schnittwinkel.

(c) Bestimmen Sie die Projektion des Richtungsvektors $(3, 2, 1)^\top$ der Geraden G auf den Normalenvektor der Ebene E, und bestimmen Sie damit und dem Schnittpunkt die Projektionsgerade H von G auf E.

Alle aktuellen Informationen zur Veranstaltung finden Sie im Internet unter
`http://www.math.kit.edu/iag1/lehre/hm2mach2013s/de`

Tutorien: Montag, den 06.05.2013, bis Mittwoch, den 08.05.2013.