Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Algebra und Geometrie
PD Dr. F. Hettlich
Dipl.-Math. J. Stompe
Dipl.-Math.techn. T. Henn

26	27	28	29	30	$\sum$

Gruppe

Karlsruhe, den 23. Mai 2013

Matrikel-Nr.: ....

Matrikel-Nr.: ....

6. Übungsblatt zur Vorlesung Höhere Mathematik II für biw/ciw/mach/mage/vt

Aufgabe 26: Gegeben sind zwei geordnete Basen A und B des $\mathbb{R}^3$

$$A = \left(\begin{pmatrix} 8 \\ -6 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -16 \\ 7 \\ -13 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 9 \\ -3 \\ 7 \end{pmatrix} \right), \qquad B = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$$

und eine lineare Abbildung $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, die bezüglich der Basis A die folgende Darstellungsmatrix hat

$${}_AM(\varphi)_A = \begin{pmatrix} 1 & -18 & 15 \\ -1 & -22 & 15 \\ 1 & -25 & 22 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix ${}_BM(\varphi)_B$ von φ bezüglich der geordneten Basis B.

Aufgabe 27:

(a) Berechnen Sie das charakteristische Polynom $p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ der Matrix A für $\lambda \in \mathbb{R}$ und

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

(b) Bestimmen Sie die Eigenwerte $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ der Matrix A.

(c) Geben Sie die Eigenvektoren zu den Eigenwerten an.

Aufgabe 28: Gegeben sei die Matrix $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 2 & 2a \end{pmatrix}$

(a) Berechnen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix A in Abhängigkeit von $a \in \mathbb{R}$.

(b) Geben Sie für $a = 2$ eine Basis von $\mathbf{ker}\,(A)$ sowie eine Basis von $\mathbf{Bild}\,(A)$ an.

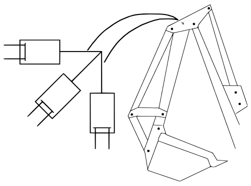
Aufgabe 29: Gegeben sei die Matrix $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 4 \\ 0 & -6 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

(a) Berechnen Sie die Eigenwerte von A.

(b) Sei $p(x) = c_3x^3 + c_2x^2 + c_1x + c_0$ das charakteristische Polynom von A. Zeigen Sie, dass $p(A) = 0$, d.h. $c_3A^3 + c_2A^2 + c_1A + c_0I_3 = 0$. (Das gilt auch allgemein für jede quadratische Matrix und ihr charakteristisches Polynom!)

(c) Bestimmen Sie aus $p(A) = 0$ die inverse Matrix A^{-1}.

Aufgabe 30: Durch eine Dehnmessstreifen-Rosette kann auf der Oberfläche eines Bewegungsmechanismus einer Baggerschaufel der Verzerrungszustand in Form des Verzerrungstensors bzgl. des x_1, x_2, x_3-Koordinatensystems bestimmt werden. Aus dem Tensor will man die Hauptdehnungen bestimmen. Diese sind bei isotropen Materialien ein Maß für die auftretenden maximalen Kräfte in den zugehörigen Richtungen.



Berechnen Sie zum aus der Messung bestimmten Tensor

$$\varepsilon = \frac{1}{50}\begin{pmatrix} 142 & -144 & 0 \\ -144 & 58 & 0 \\ 0 & 0 & -125 \end{pmatrix}$$

alle Hauptdehnungen (d.h. die Eigenwerte von ε) und geben Sie zu jeder Hauptdehnung einen auf die Länge 1 normierte Eigenvektor als zugehörige Hauptdehnungsrichtung an. Unter welchem Winkel stehen die Hauptdehnungsrichtungen zueinander? Zeigen Sie, dass die normierten Eigenvektoren eine Basis bilden. Es gibt eine Rotationsmatrix R, die die alte Basis auf die neue Basis abbildet. Bestimmen Sie den Drehwinkel φ.

Abgabetermin: Montag, den 3. Juni 2013, 12:00 Uhr, in den Abgabekästen bei Seminarraum Z1 im Gebäude 01.85 (Fritz-Erler-Str. 1–3).

6. Tutorium
zur Vorlesung Höhere Mathematik II für
biw/ciw/mach/mage/vt

Aufgabe T16: Bestimmen Sie alle Eigenwerte der quadratischen Matrizen

$$\text{(a)} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \text{(b)} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix},$$

sowie zu den reellen Eigenwerten λ je einen Eigenvektor.

Aufgabe T17: Die folgende Abbildung 1 zeigt ein aus den Punkten A, B, C, D gebildetes Quadrat um den Ursprung, die folgenden Abbildungen zeigen Bilder des Quadrats unter drei verschiedenen linearen Abbildungen $\Phi_{1,2,3} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$:

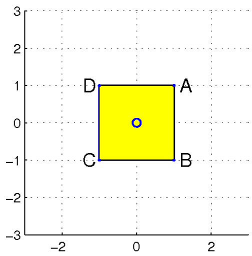


Abb. 1

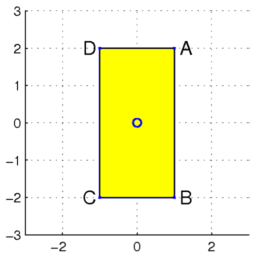


Abb. 2

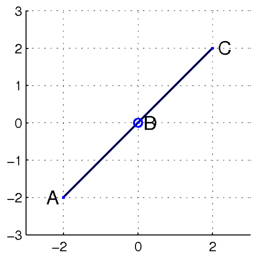


Abb. 3

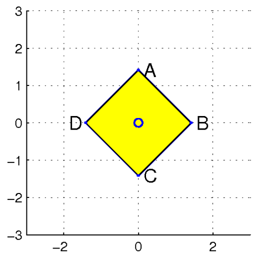


Abb. 4

Bestimmen Sie die Eigenwerte der Abbildungen und zeichnen Sie, soweit möglich, Eigenvektoren ein.

Aufgabe T18: Bestimmen Sie alle Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix

$$C = \begin{pmatrix} 5 & 4 & -5 & 5 \\ -1 & 1 & 2 & -2 \\ -3 & -4 & 7 & -5 \\ -4 & -5 & 7 & -5 \end{pmatrix}.$$

Alle aktuellen Informationen zur Veranstaltung finden Sie im Internet unter
`http://www.math.kit.edu/iag1/lehre/hm2mach2013s/`

Tutorien: Montag, den 27. Mai 2013, bis Mittwoch, den 29. Mai 2013.