Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Algebra und Geometrie
PD Dr. F. Hettlich
Dipl.-Math. J. Stompe
Dipl.-Math.techn. T. Henn

36	37	38	39	40	$\sum$

Gruppe

Karlsruhe, den 6. Juni 2013

Matrikel-Nr.: ....

Matrikel-Nr.: ....

8. Übungsblatt zur Vorlesung Höhere Mathematik II für biw/ciw/mach/mage/vt

Aufgabe 36: Die Funktion $f(x,y) = 1 + y^2$ sei definiert auf dem Rechteck

$$R = \{(x,y) : |x| < 10, \quad |y-1| < b\}.$$

(a) Geben Sie mit dem Satz von Picard-Lindelöf ein Intervall $|x| < \alpha$ an, so daß das Anfangswertproblem $y' = f(x,y)$, $y(0) = 1$ genau eine Lösung auf $(-\alpha, \alpha)$ besitzt.

(b) Wie muß man die Zahl b wählen, damit die Intervallänge 2α aus a.) größtmöglich wird?

(c) Berechnen Sie die Lösung des obigen Anfangswertproblems. Wie groß ist das maximale Existenzintervall dieser Lösung?

Aufgabe 37:

Gegeben ist die lineare Differenzialgleichung 2. Ordnung

$$t(t+1)\,u''(t) - (t^2 - 2t - 4)\,u'(t) - 2\,\frac{t^2+t-1}{t}\,u(t) = 0\,, \qquad t > 0\,.$$

(a) Für welche $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\beta \neq 0$ ist durch $u_1(t) = \alpha + \beta/t^2$, $t > 0$, eine Lösung der Differenzialgleichung gegeben?

(b) Es sei nun $u_1(t) = 1/t^2$ Bestimmen Sie durch Reduktion der Ordnung eine weitere Lösung $u_2(x)$ der Differenzialgleichung und geben Sie die allgemeine Lösung an.

(c) Weisen Sie die lineare Unabhängigkeit von u_1 und u_2 nach.

Aufgabe 38: Gegeben sei die folgende Differentialgleichung für y in $x \in \mathbb{R}$:

$$y'''(x) + y''(x) - 4y'(x) - 4y(x) = 0$$

(a) Bestimmen Sie die allgemeine reelle Lösung $y(x)$.

(b) Sei $u_1(x) = y(x)$, $u_2(x) = y'(x)$ und $u_3(x) = y''(x)$. Stellen Sie die Ableitungen u_k', $k = 1,2,3$ durch die Funktionen u_l, $l = 1,2,3$ dar und damit ein lineares System für $u(x)$ auf.

(c) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des linearen Systems aus Ihren Ergebnissen aus Aufgabenteil (a).

Aufgabe 39: Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des Systems

$$x'(t) = Ax(t) = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} x(t).$$

Zeigen Sie dazu:

(a) $\lambda = -2$ ist doppelte Nullstelle des charakteristischen Polynoms von A und $v^{(1)} = (1,1)^\top$ ist ein zugehöriger Eigenvektor.

(b) Der Ansatz $x(t) = e^{\lambda t} v^{(2)} + t e^{\lambda t} v^{(1)}$ liefert die Gleichung $(A - \lambda I)v^{(2)} = v^{(1)}$. Eine Lösung ist $v^{(2)} = (0,1)^\top$.

(c) Die Funktionen $x^{(1)}(t) = e^{\lambda t} v^{(1)}$ und $x^{(2)}(t) = e^{\lambda t} v^{(2)} + t x^{(1)}(t)$ bilden ein Fundamentalsystem.

Aufgabe 40: Man löse das Anfangswertproblem für das komplexe lineare System

$$u'(x) = \begin{pmatrix} 1 - \dfrac{1}{7}i & \dfrac{6}{7} \\ -\dfrac{65}{42} + i & -1 + \dfrac{5}{7}i \end{pmatrix} u(x), \quad x \in [0, \infty), \quad u(0) = \binom{1}{2}.$$

Abgabetermin: Montag, den 17. Juni 2013, 12:00 Uhr, in den Abgabekästen bei Seminarraum Z1 im Gebäude 01.85 (Fritz-Erler-Str. 1–3).

8. Tutorium
zur Vorlesung Höhere Mathematik II für
biw/ciw/mach/mage/vt

Aufgabe T22: Zeigen Sie, dass die Funktion $y_1(x) = x^{-1}$ die Differentialgleichung

$$2x^2 y''(x) + 3xy'(x) - y(x) = 0, \qquad x > 0$$

löst. Finden Sie eine zweite linear unabhängige Lösung mit der Methode der Reduktion der Ordnung.

Aufgabe T23: Lösen Sie das Anfangswertproblem für das lineare System

$$\begin{array}{rcll} u'(x) & = & v(x)\,, & u(0) = 2\,, \\ v'(x) & = & w(x)\,, & v(0) = 2\,, \\ w'(x) & = & 4u(x) - 4v(x) + w(x)\,, & w(0) = -3\,. \end{array}$$

Aufgabe T24: Man bestimme ein Fundamentalsystem der Eulerschen Differentialgleichung dritter Ordnung

$$u'''(x) - \frac{2}{x}u''(x) + \frac{5}{x^2}u'(x) - \frac{5}{x^3}u(x) = 0, \quad x \in (0, \infty),$$

mit dem Potenzansatz $u(x) = x^\lambda$. Zum Nachweis verwende man die Wronski-Determinante.

Alle aktuellen Informationen zur Veranstaltung finden Sie im Internet unter
`http://www.math.kit.edu/iag1/lehre/hm2mach2013s/`

Tutorien: Montag, den 10. Juni 2013, bis Mittwoch, den 12. Juni 2013.