Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Algebra und Geometrie
PD Dr. F. Hettlich
Dipl.-Math. J. Stompe
Dipl.-Math.techn. T. Henn

41	42	43	44	45	$\sum$

Gruppe

Karlsruhe, den 13. Juni 2013

Matrikel-Nr.: ....

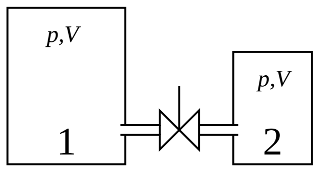
Matrikel-Nr.: ....

9. Übungsblatt zur Vorlesung Höhere Mathematik II für biw/ciw/mach/mage/vt

Aufgabe 41: Zwei Druckluftbehälter mit unterschiedlichen Volumina V_1 und V_2 sind durch eine zunächst verschlossene Rohrleitung verbunden. Vor Öffnen des Sperrventils zu $t = 0$ herrschen in den Behältern unterschiedliche Druckpegel $p_1(0)$ und $p_2(0)$ vor. Aus der Zustandsgleichung idealer Gase $pV = nRT$ (n Stoffmenge, R Gaskonstante, T Temperatur) erhalten wir unter Annahme eines isothermen Ausgleichs den Zusammenhang $\dot{p}V = \dot{n}RT$ und letztlich mit dem Strömungswiderstand W der Rohrleitung, $\dot{n} = Wp$ und $a_{1,2} := \frac{RT}{WV_{1,2}}$ das folgende System für das Modell

$$\begin{pmatrix} \dot{p}_1(t) \\ \dot{p}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a_1 & a_1 \\ a_2 & -a_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1(t) \\ p_2(t) \end{pmatrix}, \quad t > 0.$$

Es sei $p_1(0) = 1$ bar, $p_2(0) = 9$ bar, $a_1 = 1$ bar/s und $a_2 = 3$ bar/s.



(a) Welcher Behälter erreicht einen Druck von zwei Bar und nach welcher Zeit?

(b) Welcher Druck wird nach vollständigem Druckausgleich erreicht werden?

Aufgabe 42: Gegeben sei die Differentialgleichung

$$x^2y''(x) - 2xy'(x) + 2y(x) = x^3 \ln x, \quad x > 0.$$

Die zugehörige homogene Differentialgleichung besitzt eine Lösung der Form $y(x) = Ax + B$.

(a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des homogenen Problems durch Reduktion der Ordnung.

(b) Bestimmen Sie eine partikuläre Lösung des inhomogenen Problems mittels Variation der Konstanten.

(c) Lösen Sie das Anfangswertproblem der inhomogenen Differentialgleichung mit $y(1) = y'(1) = 1$.

Aufgabe 43: Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - 2y'(x) + 2y(x) = e^{2x} \sin x.$$

(a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des homogenen Problems.

(b) Verwenden Sie einen Ansatz vom Typ der rechten Seite zur Bestimmung einer partikulären Lösung.

(c) Lösen Sie das Anfangswertproblem mit $y(0) = 3/5$, $y'(0) = 1$.

Aufgabe 44: Lösen Sie die Differentialgleichung mit einem Ansatz vom Typ der rechten Seite:

$$y'''(x) - 3y''(x) + 4y(x) = (x^2 + 4x + 2)e^{3x} + e^{2x}, \; x \in \mathbb{R}$$

Aufgabe 45: Man löse das inhomogene lineare Differentialgleichungssystem

$$\mathbf{x}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}(t) \quad \text{für} \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

Wobei für die rechte Seite gilt:

a) $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} e^{-t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$ b) $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} e^{t} \\ 2 \end{pmatrix}$.

Abgabetermin: Montag, den 24. Juni 2013, 12:00 Uhr, in den Abgabekästen bei Seminarraum Z1 im Gebäude 01.85 (Fritz-Erler-Str. 1–3).

9. Tutorium
zur Vorlesung Höhere Mathematik II für biw/ciw/mach/mage/vt

Aufgabe T25: Berechnen Sie das charakteristische Polynom zur Differentialgleichung

$$y'''(x) + y''(x) + 4y'(x) + 4y(x) = f(x)\,,\ x \in \mathbb{R}\,.$$

Bestimmen Sie Ansätze vom Typ der rechten Seite für:

$$\begin{array}{lll} f_1(x) = (4+12x)e^{2x} & f_2(x) = e^{-x} & f_3(x) = \sin(2x) \\ f_4(x) = x^2\cos(2x) & f_5(x) = xe^{-x}\sin(2x) & f_6(x) = (2+x)\sin(2x) \end{array}$$

Bestimmen Sie damit für f_1 und f_2 jeweils eine partikuläre Lösung der Differentialgleichung.

Aufgabe T26: Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der folgenden Differentialgleichungen für $x > 0$

(a) $y''(x) - y(x) = x$ mit einem Ansatz vom Typ der rechten Seite,

(b) $y''(x) - y(x) = \frac{1}{x}$ durch Variation der Konstanten.

Hinweis: Das Integral $\int \frac{e^x}{x} dx$ hat keine geschlossene Darstellung. Sie dürfen es im Ergebnis so stehenlassen.

Aufgabe T27: Bestimmen Sie für die Differentialgleichung

$$x^2 y''(x) - \frac{3}{2} x y'(x) + y(x) = x^3, \quad x > 0,$$

(a) zunächst die allgemeine Lösung der zugehörigen homogenen Differentialgleichung durch Reduktion der Ordnung. Nutzen Sie, dass $y_1(x) = x^2$ die homogene Differentialgleichung löst.

(b) Bestimmen Sie eine partikuläre und die allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung durch Variation der Konstanten.

(c) Geben Sie die Lösung des Anfangswertproblems mit $y(1) = \frac{17}{5}$ und $y'(1) = \frac{21}{5}$ an.

Alle aktuellen Informationen zur Veranstaltung finden Sie im Internet unter
`http://www.math.kit.edu/iag1/lehre/hm2mach2013s/`

Tutorien: Montag, den 17. Juni 2013, bis Mittwoch, den 19. Juni 2013.