Aufgabe 4: Finden Sie mit Hilfe der Lagrangeschen Multiplikatorenregel den Punkt auf dem Kreis $x^2 + (y-2)^2 = 1$, der den kürzesten Abstand zu der Geraden $x = y$ hat.

Lösung: Sei (x, y) ein Punkt auf dem Kreis und (u, v) ein Punkt auf der Geraden. Das Quadrat des Abstandes der beiden Punkte ist $(x-u)^2 + (y-v)^2$ (da Wurzeln das Rechnen nicht vereinfachen, minimieren wir statt des Abstandes selbst lieber sein Quadrat). Für das weitere Vorgehen bieten sich zwei Möglichkeiten an:

1. Variante: (Die rein Formale, aber kompliziertere) Wir müssen die Zielfunktion $f(x, y, u, v) := (x-u)^2 + (y-v)^2$ minimieren unter den Nebenbedingungen $x^2 + (y-2)^2 = 1$ und $u = v$ Unsere Lagrangefunktion ist

$$F(x, y, u, v, \lambda_1, \lambda_2) = (x-u)^2 + (y-v)^2 + \lambda_1[x^2 + (y-2)^2 - 1] + \lambda_2(u-v).$$

Die bekannte notwendige Bedingung $\nabla F = 0$ liefert das folgende nichtlineare Gleichungssystem:

$$\begin{aligned}
1.\quad \frac{\partial F}{\partial x} &= 2(x-u) + 2\lambda_1 x = 0 \\
2.\quad \frac{\partial F}{\partial y} &= 2(y-v) + 2\lambda_1(y-2) = 0 \\
3.\quad \frac{\partial F}{\partial u} &= -2(x-u) + \lambda_2 = 0 \\
4.\quad \frac{\partial F}{\partial v} &= -2(y-v) - \lambda_2 = 0 \\
5.\quad \frac{\partial F}{\partial \lambda_1} &= x^2 + (y-2)^2 - 1 = 0 \\
6.\quad \frac{\partial F}{\partial \lambda_2} &= u - v = 0
\end{aligned}$$

Addition der ersten vier Gleichungen liefert $2\lambda_1(x+y-2) = 0$.
1. Fall: $\lambda_1 = 0$. Aus 6. folgt $u = v$. Aus 1. und 2. folgt $x = u = y$, d.h. (x, y) liegt auch auf der Winkelhalbierenden. Diese schneidet aber den Kreis nicht, wir haben einen Widerspruch. Also gilt
2.Fall: $x + y - 2 = 0$ (*)
Addiert man 3. und 4., so folgt $x+y-u-v = x+y-2u = 0$, zusammen also $2u-2 = 0$, $u = 1$ und $v = u = 1$.
Benutzen wir noch (*), so ist $f(x, y, u, v) = f(x, 2-x, 1, 1) = (x-1)^2 + (1-x)^2 = 2(1-x)^2$.
Setzen wir (*) in die Kreisgleichung ein, dann folgt $1 = x^2 + (y-2)^2 = 2x^2$.
1. Fall: $x = \sqrt{1/2}$. Dann ist $f(x, 2-x, 1, 1) = 2(1-\sqrt{1/2})^2$.
2. Fall: $x = -\sqrt{1/2}$. Dann ist $f(x, 2-x, 1, 1) = 2(1+\sqrt{1/2})^2$.
Der gesuchte Punkt hat also die Koordinaten $x = \sqrt{1/2}$, $y = 2 - x = 2 - \sqrt{1/2}$.