NOTIZEN ZUR 9. HMIII-ÜBUNG
am 12.01.2007

Aufgabe 2: (Zu Aufgabe 42) Es sei das Gebiet

$$M = \left\{ x \in R^2 : 0 \le \frac{x_2}{x_1^2 + x_2^2} \le 1 - \frac{x_1}{x_1^2 + x_2^2} \le \frac{1}{2} \right\},$$

und das Vektorfeld

$$F(x) = \frac{1}{(x_1^2 + x_2^2)^2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

gegeben. Berechnen Sie mit Hilfe des Gauß'schen Satzes und der Transformation

$$x_1 = \frac{u}{u^2 + v^2}, \quad x_2 = \frac{v}{u^2 + v^2} \tag{1}$$

den Fluß

$$\int_{\partial M} F(x) \cdot \nu(x) ds$$

durch den Rand ∂M des Gebietes, wobei ν die nach außen gerichtete Einheitsnormale an ∂M ist.
Hinweis: Für die Transformation gilt auch

$$u = \frac{x_1}{x_1^2 + x_2^2}, \quad v = \frac{x_2}{x_1^2 + x_2^2}.$$

Lösung: Mit dem Hinweis erhält man für das transformierte Gebiet:

$$\widetilde{M} = \left\{ (u, v)^T =: \widetilde{x} \in \mathbb{R}^2 : 0 \le v \le 1 - u \le \frac{1}{2} \right\}$$

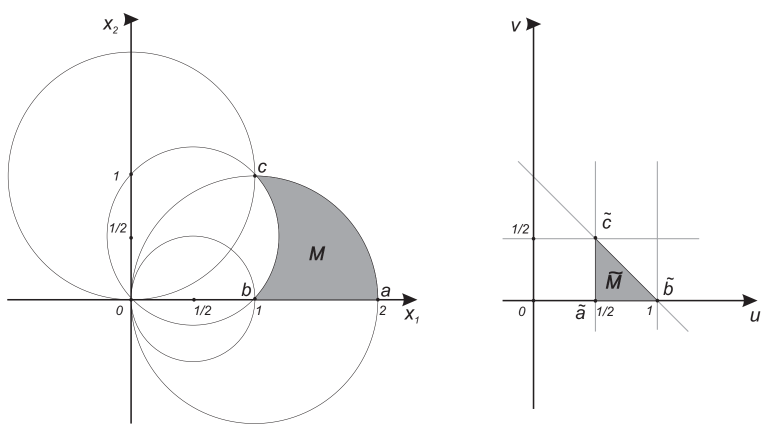

Abbildung 1: Das Ursprungsgebiet M und das transformierte Gebiet $\widetilde{M}$ bei der Transformationsforschrift $\widetilde{x} = x/\|x\|^2$

und für das transformierte Vektorfeld ergibt sich nach dem Einsetzen von (1):

$$\widetilde{F}(\widetilde{x}) = (u^2 + v^2)^2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Nun zum Fluß. Der Gauß'scher Satz sagt aus, dass unter bestimmten Voraussetzungen die Gleichung $\iint_M divF(x)dx = \int_{\partial M} F(x) \cdot \nu(x)ds$ erfüllt ist. Es gilt diese Voraussetzungen nachzuprüfen (Siehe Satz 3.19)!

Das Gebiet $\widetilde{M}$ (mache eine Skizze) ist ein Dreieck, d.h. $\widetilde{M}$ ist offen, beschränkt und der Rand $\partial\widetilde{M}$ besteht aus drei stückweise glatten Kurven. $\widetilde{F}$ ist in $\widetilde{M}$ ein stetiges und stetig differenzierbares Vektorfeld. Somit genügen $\widetilde{M}$ und $\widetilde{F}$ den Voraussetzungen des Gauß'schen Satzes.

$$\begin{aligned}
\int_{\partial M} F(x)\cdot\nu(x)ds &\overset{Transf.}{=} \int_{\partial\widetilde{M}} \widetilde{F}(\widetilde{x})\cdot\nu(\widetilde{x})ds \overset{Gauß}{=} \int_{\widetilde{M}} div\widetilde{F}(\widetilde{x})d\widetilde{x} \\
&= \int_{u_1}^{u_2}\int_{v_1(u)}^{v_2(u)} divF(u,v)|D|dvdu \\
&\quad \text{mit } |D| \text{ der Absolutbetrag der } \textit{Funktionaldeterminante} \\
&\quad D = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial u} & \frac{\partial x_1}{\partial v} \\ \frac{\partial x_2}{\partial u} & \frac{\partial x_2}{\partial v} \end{vmatrix} = -1. \\
&\quad \text{Siehe Bronstein: Taschenbuch der Mathematik, 5.Auflage, Formel (8.139)} \\
&= \int_{u=1/2}^{1}\int_{v=0}^{1-u} div(u^2+v^2)^2\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}|-1|dvdu \\
&= 4\int_{u=1/2}^{1}\int_{v=0}^{1-u}(u^3+u^2v+uv^2+v^3)dvdu \\
&= 4\int_{u=1/2}^{1}(u^3v+u^2v^2/2+u/3v^3+v^4/4)|_{v=0}^{1-u}du \\
&= 4\int_{u=1/2}^{1}(u^3(1-u)+u^2(1-u)^2/2+u(1-u)^3/3+(1-u)^4/4)du \\
&= 4(-1/6u^5+1/4u^4-1/6u^3+1/6u^2-1/20(1-u)^5)|_{u=1/2}^{u=1} \\
&= \frac{103}{480}.
\end{aligned}$$

Integralsatz von Gauß (in Worten)

Der skalare Fluß des Vektorfeldes F durch die geschlossene Fläche ∂D ist gleich dem Integral der Divergenz von F über das von ∂D umschlossene Volumen D.

◇ ◇ ◇