NOTIZEN ZUR 9. HMIII-ÜBUNG
am 12.01.2007

Aufgabe 5: (Zu Aufgabe 45) Für das räumliche Vektorfeld

$$A(x,y,z) = \left(3y, -z, \frac{3}{4}xy\right)^\top, \quad (x,y,z)^\top \in \mathbb{R}^3,$$

berechne man den Fluß der Rotation

$$\Psi = \iint_S \nu \cdot \mathrm{rot} A \, do$$

durch die nach oben orientierte, elliptische Paraboloidfläche

$$S : z = \frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{4}y^2, \quad x^2 + y^2 \leq 4,$$

mit Hilfe des Stokesschen Integralsatzes.

Hinweis: Man leite aus der angegebenen Darstellung für S eine Parameterdarstellung einschließlich der benötigten Orientierung für die räumliche Kurve C her.

Lösung: Die Kurve C erhält man durch Schnitt des Zylinders ($x^2+y^2=4$) mit der elliptischen Paraboloidfläche ($z = \frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{4}y^2$); $z = \frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{4}(4-x^2) = 3 - \frac{1}{2}x^2$. Also lautet eine Parameterdarstellung von C:

$$X(t) = (2\cos t, 2\sin t, 3 - 2\cos^2 t)^T, \; t \in [0, 2\pi),$$

und es ist $\dot{X}(t) = (-2\sin t, 2\cos t, 4\cos t \sin t)^T$.
Das Vektorfeld auf der Randkurve ist $A(t) = (6\sin t, 2\cos^2 t - 3, 3\sin t\cos t)^T$.
Daraus berechnet man Skalarprodukt: $\dot{X} \cdot A = -12\sin^2 t + 4\cos^3 t - 3\cos t + 12\sin^2 t\cos^2 t$.

Mit dem Satz von STOKES folgt:

$$\begin{aligned}
\Psi &= \iint_S \nu \cdot \mathrm{rot} A \, do \overset{Stokes}{=} \int_C \tau \cdot A \; ds = \int_0^{2\pi} \frac{\dot{X}(t)}{\|\dot{X}(t)\|_2} \cdot A(t) \|\dot{X}(t)\|_2 \; dt = \int_0^{2\pi} \dot{X}(t) \cdot A(t) \; dt \\
&= \int_0^{2\pi} (-12\sin^2 t + 4\cos^3 t - 6\cos t + 12\sin^2 t\cos^2 t) \; dt
\end{aligned}$$

Hier kommt man mit den trigonometrischen Umformungen der Integranden weiter.

$$\begin{aligned}
&= -12\left[\frac{1}{2}t - \frac{1}{4}\sin 2t\right]_0^{2\pi} + 4\left[\sin t - \frac{1}{3}\sin^3 t\right]_0^{2\pi} - 6\left[\sin t\right]_0^{2\pi} + 12\left[\frac{t}{8} - \frac{\sin 4t}{32}\right]_0^{2\pi} \\
&= -12\pi + 12 \cdot \frac{2\pi}{8} = \underline{-9\pi}.
\end{aligned}$$

◇ ◇ ◇