Institut für Algebra und Geometrie
Universität Karlsruhe (TH)
PD Dr. F. Hettlich
Dr. H. Schon
Dipl.-Math. A. Helfrich-Schkarbanenko

Karlsruhe, den 26.10.2006

Matrikel-Nr.: ....

Gruppen-Nr.: ......

1. Übung
zur Vorlesung Höhere Mathematik III für mach/ciw/mage

Aufgabe 1: a) Berechnen Sie den Gradienten ∇f zu $f : \mathbb{R}^3\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \sin(x_3)/\|x\|_2$.
b) Kugelkoordinaten werden durch eine Abbildung $x : D \to \mathbb{R}^3$ beschrieben mit

$$x(r, \phi, \theta) = (r\cos\phi\,\sin\theta,\ r\sin\phi\,\sin\theta,\ r\cos\theta)^\top\ ,$$

und $(r, \phi, \theta) \in D = [0, \infty) \times [0, 2\pi) \times [0, \pi]$. Berechnen Sie die Jacobimatrix dieser Funktion.

Aufgabe 2: a) Berechnen Sie in $\hat{x} = (0, 1)^\top$ die Richtungsableitung von $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = x_1^2 + 2x_1x_2 - x_2^2 + x_2 - 2$$

in Richtung $a = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1)^\top$ und geben Sie das Taylorpolynom vom Grad 1 um den Entwicklungspunkt $t_0 = 0$ zu $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $g(t) = f(\hat{x} + ta)$ an.

b) Bestimmen Sie die Linearisierung um $\hat{x} = (1, 1, 1)^\top$ für die Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ mit

$$f(x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{x_3}{1 + x_1 + x_2},\ \frac{x_1x_2}{1 + x_3}\right)^\top .$$

Berechnen Sie mit Hilfe der Linearisierung eine Näherung für den Funktionswert in $x = (0.99, 1.01, 1.01)^\top$ und vergleichen Sie diesen mit dem wahren Funktionswert.

Aufgabe 3: Zu $n \in \mathbb{N}$ ist die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} \dfrac{x_1^2\, x_2^n}{x_1^2 + x_2^6}, & (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2\backslash(0, 0) \\ 0, & (x_1, x_2) = (0, 0). \end{cases}$$

Berechnen Sie die partiellen Ableitungen von f in einem Punkt $x \neq (0, 0)$. Überlegen Sie sich mit der Definition der partiellen Ableitung, ob f in $(0, 0)^\top$ partiell differenzierbar ist.
Zusatz: Für welche $n \in \mathbb{N}$ ist f stetig partiell differenzierbar?

Aufgabe 4: a) Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ in $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$ differenzierbar und es gelte $f(\hat{x}) \neq 0$. Zeigen Sie mit der Produktregel,

$$\nabla\left(\frac{1}{f}\right)(\hat{x}) = -\frac{1}{(f(\hat{x}))^2}\,\nabla f(\hat{x}).$$

b) Die Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sei differenzierbar und homogen, d.h. es gilt die Identität $f(tx) = tf(x)$ für $t \in \mathbb{R}$ und $x \in \mathbb{R}^n$. Leiten Sie mit der Kettenregel die Homogenitätsrelation

$$(\nabla f(x))^\top x = f(x)$$

her.

Aufgabe 5: Bestimmen Sie die Ableitung der Funktion $f : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(s) := \int_{1/s}^{s^2} \frac{\sin(st)}{t}\, dt\,,$$

indem Sie partielle Ableitungen von $g(x, y, z) = \int_x^y \frac{\sin(zt)}{t}\, dt$ und die Kettenregel verwenden.

Abgabetermin: Donnerstag, den 2.11.2006, 13:00 Uhr