Institut für Algebra und Geometrie
Universität Karlsruhe (TH)
PD Dr. F. Hettlich
Dr. H. Schon
Dipl.-Math. A. Helfrich-Schkarbanenko

Karlsruhe, den 2.11.2006

Matrikel-Nr.: ....

....

Gruppen-Nr.: ......

2. Übung
zur Vorlesung Höhere Mathematik III für mach/ciw/mage

Aufgabe 6: Bestimmen Sie den Gradienten, die Hessematrix und den Laplace-Operator, $\Delta f := \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2}$, zu den Funktionen $g : \mathbb{R}^2 \backslash \{0\} \to \mathbb{R}$ und $h : \mathbb{R}^3 \backslash \{0\} \to \mathbb{R}$ mit

$$g(x) = \ln \|x\|_2 \quad \text{und} \quad h(x) = \frac{1}{\|x\|_2}\,.$$

Aufgabe 7: Gegeben ist die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to R$ durch

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x_1^3 x_2 - x_1 x_2^3}{x_1^2 + x_2^2}, & x \neq (0,0)^\top, \\ 0, & x = (0,0)^\top \end{cases} .$$

Bestimmen Sie mit der Definition die partiellen Ableitungen $\dfrac{\partial f}{\partial x_1}(0,t)$ und $\dfrac{\partial f}{\partial x_2}(t,0)$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Berechnen Sie ferner $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(0,0)$ sowie $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(0,0)$. Welche Voraussetzung des Satzes von Schwarz ist verletzt?

Aufgabe 8: Zeigen Sie, dass die folgenden Differentialgleichungen exakt sind, und berechnen Sie ihre allgemeinen Lösungen.

(a) $$\frac{x}{(x^2 + y^2(x))^{3/2}} + \frac{y(x)}{(x^2 + y^2(x))^{3/2}}\, y'(x) = 0, \quad \text{für } (x, y(x)) \neq (0,0)\,,$$

(b) $$\frac{y(x)}{x} + 6x + (\ln x - 2) y'(x) = 0, \quad \text{für } x > 0\,.$$

Aufgabe 9: Berechnen Sie die Lösung des Anfangswertproblems

$$\cos y + 2xy + (x^2 - y - x \sin y) y' = 0, \qquad y(0) = \sqrt{2}$$

in impliziter Form.

Tipp: Überprüfen Sie, ob die Differentialgleichung exakt ist!

Aufgabe 10: Gegeben sind die Vektorfelder $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ und $G : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit

$$\begin{aligned} F(x,y) &= \left(3\cos(x+y) - 3x \sin(x+y), -3x\sin(x+y) - \frac{2}{y^3}\right)^\top, \\ G(x,y,z) &= \left(2y^2 + z^3 \cos x, 4xy + 1, 3z^2 \sin x\right)^\top . \end{aligned}$$

Bestimmen Sie Potentiale zu F und G, d.h. Funktionen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $\nabla f = F$ und $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mit $\nabla g = G$.

Abgabetermin: Donnerstag, den 9.11.2006, 13:00 Uhr