Institut für Algebra und Geometrie
Universität Karlsruhe (TH)
PD Dr. F. Hettlich
Dr. H. Schon
Dipl.-Math. A. Helfrich-Schkarbanenko

21	22	23	24	25	$\sum$

Gruppe

Karlsruhe, den 23.11.2006

Mat.-Nr.: ....

Mat.-Nr.: ....

5. Übung
zur Vorlesung Höhere Mathematik III für biw/ciw/mach/mage/vt

Aufgabe 21: Es soll der Schnittpunkt zwischen der Geraden $y = x + 1$ und dem Graphen der Funktion $f(x) = \tan x$ mit Hilfe einer Fixpunktiteration berechnet werden.
a) Warum wird die Fixpunktiteration mit Startwert $x_0 = 1$ und Fixpunktgleichung $x = \tan x - 1$ nicht konvergieren? Geben Sie die ersten 5 Glieder der Iterationsfolge an.
b) Betrachten Sie die Fixpunktgleichung $\arctan(x + 1) = x$ und zeigen Sie, dass die Fixpunktiteration konvergiert. Wieviele Iterationsschritte sind hinreichend, um den Fixpunkt $\hat{x}$ auf zwei Nachkommastellen genau angeben zu können?

Aufgabe 22: Mit Hilfe des Mittelwertsatzes zeige man, dass die Funktionen g und h mit $g(x) = (x + e^{-x})/2$ und $h(x) = (5x + e^{-x})/6$ auf dem Intervall $I = [0, 1]$ kontrahierend sind. Bestimmen Sie die Kontraktionskonstante κ. Zeigen Sie, dass beide Iterationen gegen denselben Fixpunkt konvergieren.
Formulieren Sie weiter ein Newtonverfahren, um diesen Fixpunkt zu bestimmen, und führen Sie drei Iterationsschritte mit Startwert $x_0 = 1$ aus, um diese mit den Fixpunktiterationen zu vergleichen.

Aufgabe 23: Gegeben sei die Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $g(x) = e^x - 2$.
a) Zeigen Sie mittels einer Skizze, dass der Graph der Funktion die Gerade $y = x$ genau zweimal schneidet, d.h. die Funktion besitzt zwei Fixpunkte.
b) Suchen Sie ein geeignetes abgeschlossenes Intervall, auf dem sich der Banachsche Fixpunktsatz anwenden lässt und bestimmen Sie damit einen der Fixpunkte.
c) Wählen Sie die Anzahl der Iterationsschritte n so, dass bei einer a-priori-Abschätzung der Fehler höchstens 10^{-3} beträgt.

Aufgabe 24: Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ durch $f(x) = (x_2^3 - x_1^3,\, x_1^3 + x_2^3 - 4)^\top$. Stellen Sie die Iterationsvorschrift für das Newtonverfahren auf, und zeigen Sie, dass das Verfahren für jeden Startwert $x^{(0)} \in [1, 2] \times [1, 2]$ konvergiert, indem Sie die zugehörige Fixpunktgleichung $x = x - [f'(x)]^{-1} f(x)$ untersuchen.

Aufgabe 25: Gegeben sei das LGS $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 1 & 6 & 1 \\ 3 & 2 & 6 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 10 \\ -2 \\ 16 \end{pmatrix}.$$

a) Lösen Sie das lineare Gleichungssystem mit Hilfe des Gauss-Algorithmus.
b) Setzen Sie $D \in \mathbb{R}^{3\times3}$ als die Diagonalmatix mit den Diagonalelementen von A. Bestimmen Sie die Matrix $M := I - D^{-1}A$ und den Vektor $q := D^{-1}b$.
c) Der $\mathbb{R}^3$ sei nun ausgestattet mit der Maximumsnorm $\|\cdot\|_\infty$. Zeigen Sie, dass die Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit $f(x) = Mx + q$ die Voraussetzungen des Banachschen Fixpunktsatzes erfüllt und bestimmen Sie die Kontraktionszahl.
d) Überlegen Sie sich, dass der Fixpunkt $\hat{x}$ von f gerade die Lösung des LGS $Ax = b$ ist.
e) Führen Sie, ausgehend vom Startwert $(1, 1, 1)^\top$, einen Schritt des Iterationsverfahrens durch. Wieviele Schritte sind hinreichend, um die Komponenten von $\hat{x}$ mit einem maximalen Fehler von 10^{-2} zu bestimmen?

Abgabetermin: Donnerstag, den 30.11.2006, 13:00 Uhr