Aufgabe 1: Zeigen Sie mit dem Satz über implizite Funktionen, dass sich in einer Umgebung des Punktes $(0,1)^\top \in \mathbb{R}^2$ die Gleichung

$$2\sin(x) + e^{\sin(xy)} = x + y$$

nach $x = \phi(y)$ auflösen läßt mit einer differenzierbaren Funktion ϕ mit $\phi(1) = 0$. Bestimmen Sie weiter zu ϕ um den Entwicklungspunkt $y_0 = 1$ das Taylorpolynom erster Ordnung, $T(y) = \phi(1) + \phi'(1)(y-1)$.

Die folgende Auflistung enthält Zitate aus Lösungen der obigen Klausuraufgabe. Was halten Sie von den Antworten? [Es geht hier nicht um Rechenfehler, sondern um Verständnisprobleme. Insbesondere sollen Sie die Aufgabe *nicht* rechnen.]

1.

$$\begin{aligned}&2\sin(x) + e^{\sin(xy)} - x - y = 0\\ &\text{1. Schritt: (a) } F(0,1) = 0?\ e^0 - 1 = 0.\text{ ok.}\\ &\qquad\qquad\quad\text{(b) } F_x(0,1) = 0?\ 2 \neq 0.\text{ ok.}\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}&f(x,y) := 2\sin(x) + e^{\sin(xy)} - x - y\\ &\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) := e^{\sin(xy)}\cos(xy) - 1\\ &\frac{\partial f}{\partial y}(0,1) = -1 \neq 0.\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Nach dem Satz über implizite Funktionen läßt sich die Gleichung nach $x = \phi(y)$ auflösen

3.

$$\begin{aligned}&\text{Taylorpolynom: } y_0 = 1, T(y) = \phi(1) + \phi'(1)(y-1)\\ &\phi' = -\frac{F_x}{F_y}\ \text{(Formelsammlung Seite 131)}\end{aligned}$$

4. Setze $f(x) = 2\sin(x) + e^{\sin(xy)} - x - y = 0$.

5.

$$\begin{aligned}&P = (0,1)^\top.\\ &2\sin(x) + e^{\sin(xy)} = x + y.\\ &f(x,y) = 2\sin(x) + e^{\sin(xy)} - x - y,\ \nabla f = \dots\\ &x'(p) = -\frac{f_y(x,y)}{f_x(x,y)}.\end{aligned}$$

Lösung:

1. Die Funktion F wurde nie definiert, es ist zunächst also völlig unklar, was F sein soll. Außerdem steht dann die partielle Ablleitung von F nach x da, ohne das irgendwas gerechnet wurde (wo kommt $2 \neq 0$ her ?). Eine Korrektor würde hierfür sicher Punkte abziehen (und hat es in diesem Fall auch).

2. Hier wird die falsche Bedingung geprüft. Wenn Sie die Gleichung $f(x, y) = 0$ nach x auflösen wollen, also $\phi(y)$ finden wollen mit $f(\phi(y), y) = 0$, dann müssen Sie

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 1) \neq 0$$

prüfen! Wenn Sie nach der zweiten Variablen y auflösen wollen, also $\phi(x)$ finden wollen mit $f(x, \phi(x)) = 0$, dann müssen Sie

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0, 1) \neq 0$$

prüfen! Nicht verwechseln!

3. Das ist die falsche Formel für $\phi'(1)$! In der Formelsammlung steht nämlich (vermutlich?) nur die Formel, die Sie brauchen, wenn Sie die Gleichung nach y auflösen wollen. In dieser Aufgabe wollen Sie aber nach x auflösen und das ist das, was da steht falsch.

4. Das ist gut gemeint - aber formal unsauber: Es ist auf jeden Fall richtig und gut, f so zu definieren. Dann dürfen Sie aber aber der rechten Seite nicht noch ein $= 0$ schreiben. Sonst steht da nämlich (wenn Sie den mittleren Teil mal weglassen $f(x, y) = 0$ und das ist sicher so nicht gemeint. Tipp: Sie könnten zum Beispiel Folgendes schreiben:

$$\text{Setze } f(x, y) := 2\sin(x) + e^{\sin(xy)} - x - y \stackrel{!}{=} 0,$$

um anzudeuten, dass der erste Teil der Gleichung Definition ist, und der zweite Teil die Gleichung ist, die Sie lösen wollen.

5. Das ist fast richtig, bis dass es natürlich heißen soll

$$x'(p) = -\frac{f_y(p)}{f_x(p)},$$

aber das ist wohl ein Tippfehler.

Bitte schreiben Sie das trotzdem nicht so! Schreiben Sie *nicht* $x(y)$, führen Sie also bitten keine Funktion $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ein, die von y abhängt. Sie haben nämlich schon die Variable x eingeführt, und dann kommen Sie (unter Umständen) in Teufels Küche, wenn Sie mit der Variablen x und der Funktion $x(y)$ durcheinanderkommen. Schreiben Sie besser immer $\phi(y)$ wenn Sie von der Funktion reden, die Sie so suchen, dass $x = \phi(y)$ gilt.