Aufgabe 1: Durch die Parametrisierung $x(t) = \sin(2t)(\cos, \sin t)^\top$ mit $t \in [0, 2\pi]$ ist eine Kurve $\Gamma = \{x(t) \subset \mathbb{R}^2 : t \in [0, 2\pi]\}$ gegeben.

(a) Ist die Kurve nach der Bogenlänge parametrisiert?

(b) Berechnen Sie die Arbeit längs der Kurve Γ im Kraftfeld

$$F(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 2x_1x_2 \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$$

Die folgende Auflistung enthält Zitate aus Lösungen der obigen Klausuraufgabe. Was halten Sie von den Antworten? [Es geht hier nicht um Rechenfehler, sondern um Verständnisprobleme. Insbesondere sollen Sie die Aufgabe nicht rechnen. Wir immer sollten Sie sich an den Antworten kein Beispiel nehmen.]

1. (a) Die Kurve ist nicht nach der Bogenlänge parametrisiert. Diese erfolgt nämlich über die Umkehrfunktion von s.

2. (a) Ja, die Kurve ist nach der Bogenlänge parametrisiert, da $x(t) = \dot{x}(t)$.

3. (a) Ja, da $x(t)$ eine Parameterdarstellung ist und eine Raumkurve Γ hat.

4. (a) $\dot{x}(t) = 2\cos(t) \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} + \sin(2t) \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix}$. Also: $\|\dot{x}(t)\|_2 = \sqrt{2\cos(2t) + \sin(2t)}$.

5. (a) $\|\dot{x}(t)\| = \ldots$ lange Rechnung $\ldots \sqrt{4\cos^2(2t) + \sin(2t)^2}$, $t \in [0, \pi/2]$. Für $t = 0 \Rightarrow \|\dot{x}(0)\| = 2$. Für $t = \pi/2 \Rightarrow \|\dot{x}(\pi/2)\| = 1$. Also ist die Kurve nach der Bogenlänge parametrisiert.

6. (a) Ja.

7. (b) Funktion F scheint konservativ zu sein. Somit genügt es, ...

8. (b) $\frac{\partial F}{\partial x_1} = \frac{2}{2x_1} 2x_1x_2 \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} = 2x_1 \begin{pmatrix} x_2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Lösung:

1. Die Aussage “Die Kurve ist nicht nach der Bogenlänge parametrisiert.” ist zwar richtig, um Punkte zu bekommen müssen Sie das aber begründen, d.h. nachrechnen! Die hier gegebene Begründung ist (völlig) falsch. Wenn Sie eine beliebige Parametrisierung einer Kurve haben, können Sie mit Hilfe der Umkehrfunktion der Bogenlänge $s(t)$ eine Parametrisierung nach der Bogenlänge ausrechnen (Skript Seite 43/44). Ob eine gegebene Kurve aber nach der Bogenlänge parametrisiert ist, hat zunächst einmal nichts mit s oder seiner Umkehrfunktion zu tun: Es gilt einfach zu entscheiden ob $\|\dot{x}(t)\|_2 = 1$ gilt für alle $t \in [0, 2\pi]$.

2. Das ist weder das richtige Kriterium, noch ist die Aussgaen sich richtig: Fr das angegebene $x(t)$ gilt nämlich nicht, dass $x(t) = \dot{x}(t)$, und selbst wenn das gelten würde, hat das *nichts* damit zu tun, ob die Kurve nach der Bogenlänge parametrisiert ist.

3. ?!? ...da hat jemand nicht verstanden, um was es in der Frage geht.

4. Das ist schade: Die Ableitung $\dot{x}(t)$ ist richtig, aber die Norm der Ableitung ist falsch ausgerechnet. Sind $\dot{x}(t) = (\dot{x}_1(t), \dot{x}_2(t))^\top$ die Komponenten von $\dot{x}(t)$, dann gilt natürlich

$$\|\dot{x}(t)\|_2 = \sqrt{(\dot{x}_1(t))^2 + (\dot{x}_2(t))^2}.$$

5. Autsch! Zunächst einmal: Die Rechnung ist richtig, und $\dot{x}(t)$ ist tatsächlich $\sqrt{4\cos^2(2t) + \sin(2t)^2}$ für $t \in [0, \pi/2]$. Ein kleiner Schönheitsfehler: schreiben Sie *entweder* $\sin^2(t)$ oder $(\sin(t))^2$, aber mischen Sie nicht, so wie in $\cos^2(2t) + \sin(2t)^2$. Das verwirrt nur. Aber jetzt kommt's: Der/die Studierende setzt zwei Zahlen für t ein, findet einmal, dass $\|\dot{x}(0)\| = 2$ und einmal $\|\dot{x}(\pi/2)\| = 1$ und folgert, dass die Kurve nach der Bogenlänge parametrisiert ist. NEIN! Eine Kurve heißt genau dann "nach der Bogenlänge parametrisiert", wenn FÜR ALLE t im Definitionsbereich gilt, dass $\|\dot{x}(t)\| = 1$. Wenn Sie also EIN t finden, so dass $\|\dot{x}(t)\| \neq 1$, dann ist die Kurve NICHT nach der Bogenlänge parametrisiert!

6. Ohne Begründung gibt's keine Punkte.

7. Die Funktion F ist durchaus konservativ (d.h. es gibt ein Potential zu F), aber dafür, dass das *anscheinend* der Fall ist, können Sie sich nichts kaufen (und bekommen auch keine Punkte). Sie müssen das nachrechnen!

8. Sie müssen vektorwertige (also mehrdimensionale) Funktionen richtig partiell ableiten können. Das ist eine ABSOLUTE Grundvoraussetzung (und die ist in dem Fall nicht erfüllt).