Aufgabe 1: Durch die Bedingungen $x_1 < 0$, $x_3 < 2$ und $x_1^2 + x_2^2 + 1 < x_3$ wird eine beschränkte Menge $D \subset \mathbb{R}^3$ beschrieben. Berechnen Sie über den Rand ∂D des Gebietes das Oberflächenintegral $\iint_{\partial D} F \cdot \nu \, do$ für das Vektorfeld $F(x) = (e^{x_2 x_3}, x_1 x_2 x_3, e^{x_1 + x_2})^\top$, wobei mit ν der nach außen gerichtete Normaleneinheitsvektor an ∂D bezeichnet ist.

Hinweis: Integralsätze.

Die folgende Auflistung enthält Zitate aus Lösungen der obigen Klausuraufgabe. Was halten Sie von den Antworten? [Es geht hier nicht um Rechenfehler, sondern um Verständnisprobleme. Insbesondere sollen Sie die Aufgabe nicht rechnen. Wir immer sollten Sie sich an den Antworten kein Beispiel nehmen.]

1. Parametrisierung: $x = (r\cos\phi, r\sin\phi, z)$, $r \in [0,1]$, $\phi \in [0, 2\pi]$, $z \in [0,2]$
2. Parametrisierung: $x = (0, r\sin(t), t)$, $r \in [0, x_3 - 1]$, $t \in [0, 2\pi]$.
3. Parametrisierung: $x = (r\cos\phi, r\sin\phi, z)$, $\phi \in [0, 2\pi]$, $r \in [0, \sqrt{z-1}]$, $z \in [1,2]$. $\int_D \operatorname{div} F \, dx = \int_D x_1 x_3 \ dx = \int_0^{2\pi} \int_1^2 \int_0^{\sqrt{z-1}} r\cos\phi \, z \, dr dz d\phi$.
4. $F(x) = (e^{x_2 x_3}, x_1 x_2 x_3, e^{x_1 + x_2})^\top$. $\iint_{\partial D} F \cdot \nu \ do = \int_D \operatorname{rot} F \ dx$.
5. $F(x) = (e^{x_2 x_3}, x_1 x_2 x_3, e^{x_1 + x_2})$. Also: $\operatorname{div} F = (0, x_1 x_3, 0)$.

Lösung:

1. Die Parametrisierung stimmt nicht. Wenn Sie Zylinderkoordinaten wählen (das ist hier ok) und $r \in [0,1]$, $\phi \in [0, 2\pi]$, $z \in [0,2]$ laufen lassen, dann beschreiben Sie einen Zylinder mit Radius 1 und Höhe 2. Der Körper in der Aufgabe sieht aber offensichtlich anderst aus. Das Problem liegt bei z und ϕ. Wegen $x_1 < 0$ kann ϕ nicht in $[0, 2\pi]$ laufen und wegen $x_1^2 + x_2^2 + 1 < x_3$ kann auch z nicht zwischen 0 und 2 laufen.
2. Die Parametrisierung *kann gar nicht stimmen*! Denn die ersten Koordinate in $x = (0, r\sin(t), t)$ ist immer Null, dann wäre das Volumen des Körpers aber Null, und das ist falsch (Skizze!). Außerdem ist der Winkel $t \in [0, 2\pi]$ falsch gewählt, weil laut Aufgabenstellung $x_1 < 0$ gelten soll.
3. Die Parametrisierung passt fast, nur die ϕ-Grenzen stimmen nicht: wegen $x_1 < 0$ darf ϕ nur zwischen $\pi/2$ und $3/2\pi$ laufen. Die Divergenz von F ist auch ok ($x_1 x_3$), aber die Verzerrung wurde vergessen: Die Jacobideterminante bei Zylinderkoordinaten ist r und die müßte zusätzlich im Integral auftauchen. Achten Sie darauf, dass Sie bei "einfachen" Subsitutionen die Verzerrung nicht vergessen!!
4. Die Rotation muss durch die Divergenz ersetzt werden! Das was dasteht, ist so eine Art falsch angewandter Integralsatz von Stokes, und der passt hier nicht! Man muss hier den Satz von Gauss benutzen, und das ist NICHT das gleiche wie der Satz von Stokes. Sie können also nicht einfach Divergenz und Rotation vertauschen. Der Satz von Gauss verknüpft Integrale über Volumina mit Integralen über Flčhen, wohingegen der Satz von Stokes Integrale über Flčhen mit Integralen über Ränder verknüpft.
5. NEIN! Die Divergenz eines Vektorfelds ist eine skalare Größe, also eine Zahl, kein Vektor. Genauer:
$$\operatorname{div} F(x_1, x_2, x_3) = \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial F_j}{\partial x_j}.$$