Institut für Algebra und Geometrie
Universität Karlsruhe (TH)
Prof. Dr. Andreas Kirsch
Dr. Anastasia August
Dipl.-Math. Armin Lechleiter

Karlsruhe, den 26.10.07

Gruppen-Nr.: ......

Matrikel-Nr.: ....

Matrikel-Nr.: ....

1. Übung
zur Vorlesung Höhere Mathematik III für mach/mage/biw/ciw/vt

Aufgabe 1: Die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ist definiert durch

$$f(x,y) = (x^2 - 2y^2)e^{x^2+y^2}.$$

Berechnen Sie den Gradienten der Funktion $g(t) = f(\sin(t), \cos(t))$ mit Hilfe der Kettenregel und bestimmen Sie alle kritischen Punkte von g. Geben Sie einen Punkt $x_0 \in \mathbb{R}^2$ und eine Richtung a an, so dass die Richtungsableitung von f am Punkt x_0 in Richtung a verschwindet.

Aufgabe 2: (a) Berechnen Sie den Gradienten ∇f und das Differential der Funktion

$$f(x_1, x_2, x_3) = \sin(x_1)x_2\cos(x_3).$$

(b) Berechnen Sie die Jacobimatrix f' der Funktion

$$f(x_1, x_2, x_3) \quad = \begin{pmatrix} \sin(x_1) + \ln(1 - x_2^2) \\ e^{-x_2^2} \\ \cosh(x_1 x_3) \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 3: Wir betrachten die Funktion

$$f(x,y) = \arctan\left(\frac{y}{x}\right), \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad y \in \mathbb{R}.$$

Berechnen Sie df im Punkt $p_0 = \left(1, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ und geben Sie die Gleichung der Tangentialebene in p_0 an. In welcher Richtung $(dx, dy) = (\cos\alpha, \sin\alpha)$ steigt die Tangentialebene in p_0 nicht an? Wie lauten die Richtungen des stärksten Anstiegs bzw. Abstiegs von $f(x,y)$ in p_0?

Aufgabe 4: (a) Eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ heißt homogen vom Grad $\alpha \in \mathbb{R}$, falls $f(tx) = t^\alpha f(x)$ gilt für alle $t > 0$ und $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Beweisen Sie, dass eine solche Funktion die *Eulersche Beziehung* erfüllt:

$$f'(x)x = \alpha f(x).$$

Rechnen Sie die Eulersche Beziehung für $f : \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \to \mathbb{R},\ f(x) = \|x\|_2^{-1}$ explizit nach.

(b) Es seien $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbare Funktionen und $g(x) \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, dass die folgende Beziehung gilt,

$$\nabla\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{\nabla f(x)}{g(x)} - \frac{f(x)}{(g(x))^2}\nabla g(x), \qquad x \in \mathbb{R}^n.$$

Hinweis: (a) Untersuchen Sie $F(t) = f(tx)$.

Aufgabe 5: (a) Bestimmen Sie die partiellen Ableitungen der Funktion

$$F(x,y) = \int_1^{\sqrt{x}} \frac{1}{\tau}\cos(\tau^2 y\pi)\,d\tau, \quad x, y \geq 1\,.$$

(b) Berechnen Sie den Wert $g'(2)$ von der Funktion $g(t) = \displaystyle\int_1^{\sqrt{t}} \frac{1}{\tau}\cos(\tau^2 t^2 \pi)\,d\tau, \quad t \geq 1\,.$

Hinweis: Benutzen Sie $g(t) = F(t, t^2)$ und die Kettenregel.

Abgabetermin: Montag, den 5.11.07, 11:00 Uhr