Gruppe

Universität Karlsruhe (TH)
Prof. Dr. Andreas Kirsch
Dr. Anastasia August
Dipl.-Math. Armin Lechleiter

46	47	48	49	50	$\sum$

Karlsruhe, den 11.01.2008

Mat.-Nr.: ....

Mat.-Nr.: ....

Mat.-Nr.: ....

10. Übung
zur Vorlesung Höhere Mathematik III für mach/mage/biw/ciw/vt

Aufgabe 46: (a) Benutzen Sie die erste Greensche Formel, um zu zeigen, dass für eine harmonische Funktion u in einem Gebiet $D \subset \mathbb{R}^3$ gilt

$$\iint_{\partial D} \frac{\partial u}{\partial \nu}\, do = 0.$$

Zeigen Sie außerdem, dass $\iint_{\partial D} u \frac{\partial u}{\partial \nu}\, do \geq 0$ gilt. Dabei ist D ein beschränktes Gebiet mit stückweise glattem Rand, ν ist der äußere Normaleneinheitsvektor zu D, die Funktion u und ihre Normalableitung sind stetig auf den Rand ∂D fortsetzbar und *harmonisch* bedeuted, dass $\Delta u = 0$ in D.

(b) Im Körper $K = [0,1]\times[0,1]\times[0,1] \subset \mathbb{R}^3$ herrscht die Temperaturverteilung $T(x,y,z) = x^2 - y^2$. Berechnen Sie den insgesamten Wärmefluss $\iint_{\partial K} \frac{\partial T}{\partial \nu}\, do$ über den Rand von K.

Aufgabe 47: Betrachten wir die Funktion $f(x) = \dfrac{1}{2} \ln\left(x_1^2 + x_2^2\right)$ auf dem Kreisring $D : r < \|x\|_2 < 1$ für $0 < r < 1$. Berechnen Sie das Kurvenintegral $\int_{\|x\|_2 = r} \frac{\partial f}{\partial \nu}(x)\, ds$, wobei ν den äußeren Normaleneinheitsvektor an D bezeichnet.

Aufgabe 48: Berechnen Sie für das Vektorfeld $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit $F(x) = (x_1 + 2x_3, -x_1, \frac{1}{2}x_1x_2)^\top$ den Fluss der Rotation

$$\iint_S \operatorname{rot} F(x) \cdot \nu_S(x)\, do$$

durch die nach oben orientierte (d.h. ν_S zeigt nach oben) elliptische Paraboloidfläche

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 :\ x_3 = \frac{1}{9}x_1^2 + \frac{8}{9}x_2^2,\ x_1^2 + x_2^2 \leq 9 \right\}$$

mit Hilfe des Stokes'schen Satzes.

Aufgabe 49: Gegeben sei das Vektorfeld $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit $F(x) = (x_3, -x_1, x_2x_3^2)^\top$ und die Fläche $S = \{x \in \mathbb{R}^3 : (x_1 - 2)^2 + x_2^2 + x_3^2 = 9,\ x_3 \geq 0\}$. Verifizieren Sie den Satz von Stokes:

$$\iint_S \operatorname{rot} F(x) \cdot \nu_S(x)\, do = \int_{\partial S} F(x) \cdot \tau(x)\, ds.$$

Hinweis: Verifizieren heißt, beide Integrale zu berechnen und zu zeigen, dass bei beiden der gleiche Wert herauskommt!

Aufgabe 50: Wir betrachten das Vektorfeld $F(x,y,z) = (y,\ -x,\ xz)^\top$ und die Fläche $S :\ x^2 + y^2 + (z-4)^2 = 25,\ z \geq 0$. Verifizieren Sie den Satz von Stokes,

$$\iint\limits_S \operatorname{rot} F \cdot \nu_S\, do = \int\limits_{\partial S} F \cdot \tau\, ds.$$

Hinweis: Sie können zum Beispiel Kugelkoordinaten bezüglich $(0,0,4)^\top$ benutzen: $x = 5\cos\theta\cos\varphi$, $y = 5\cos\theta\sin\varphi$, $z = 4 + 5\sin\theta$.

Abgabetermin: Montag, den 21.1.2008, 12:30 Uhr