

Gruppe

Universität Karlsruhe (TH)
 Prof. Dr. Andreas Kirsch
 Dr. Anastasia August
 Dipl.-Math. Armin Lechleiter

51	52	53	54	55	Σ

Karlsruhe, den 18.01.2008

Mat.-Nr.:

Mat.-Nr.:

Mat.-Nr.:

11. Übung
zur Vorlesung Höhere Mathematik III für mach/mage/biw/ciw/vt

Aufgabe 51: Bestimmen Sie, ob die folgenden partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung im \mathbb{R}^2 linear oder quasi-linear sind:

- (a) $5x_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} + 13e^{x_1} \frac{\partial u}{\partial x_1} + x_1^2 u^2 = 2$ (b) $x_2^5 \frac{\partial u}{\partial x_1} + 4 \frac{\partial u}{\partial x_2} + 25u = \sin(x)$
 (c) $\sin\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right) + \sin(x) \frac{\partial u}{\partial x_2} + \cos(u) = e^{ix}$ (d) $\pi \frac{\partial u}{\partial x_1} + u \frac{\partial u}{\partial x_2} + \cos^2(u) + 2u = 0.$

Bestimmen Sie außerdem von jeder der folgenden Differentialgleichungen zweiter Ordnung den Hauptteil und geben Sie an, für welche Punkte im \mathbb{R}^2 (bzw. \mathbb{R}^3) diese Differentialgleichungen elliptisch, parabolisch oder hyperbolisch sind.

- (e) $3u_{xx} + 4u_{xy} + 3u_{yy} + 5u_x - 7u_y + 9 \sin(x+y) u = 1, \quad (x, y)^\top \in \mathbb{R}^2,$
 (f) $u_{xx} + 2xyu_{yy} + y^2 u_{zz} - 2x u_x + z u_z + \ln|x+y| = 0, \quad (x, y, z)^\top \in \mathbb{R}^3.$

Aufgabe 52: Die einfachste Form der Wellengleichung im \mathbb{R}^2 lautet

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Zeigen Sie: Für eine beliebige Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sind $u^{(1)}(x, t) = f(x+ct)$ und $u^{(2)}(x, t) = f(x-ct)$ Lösungen der Wellengleichung. Welche Anfangsbedingung an $t = 0$ erfüllen diese Lösungen? Interpretieren Sie die Lösungen physikalisch für den Fall das x den Ort und t die Zeit bezeichne, zum Beispiel mit einer Skizze.

Aufgabe 53: Bestimmen Sie mit dem Charakteristikenverfahren die Lösung u des Anfangswertproblems

$$xu_x(x, y) + \frac{x}{yu(x, y)} u_y(x, y) + u(x, y) = 0, \quad x, y > 0$$

und $u(t^2, t) = 1, t > 0.$

Aufgabe 54: Bestimmen Sie mit dem Charakteristikenverfahren die Lösung des Anfangswertproblems

$$x \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} + \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = t u(x, t), \quad u(x, 0) = x^2, \quad x, t \in \mathbb{R}.$$

Aufgabe 55: Die (linearisierte) Druckstoßgleichung in einem Druckwasserstollen mit Neigung $\alpha \in [0, \pi/2]$ beschreibt die querschnittsgemittelte Geschwindigkeit $v(x, t)$ parallel zur Rohrachse,

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} - c \sin(\alpha) + v = 0.$$

Dabei ist $p(x, t)$ der Druck und ρ die Dichte der Flüssigkeit, c ist eine positive Konstante. Lösen Sie diese Gleichung für $x \in \mathbb{R}$ und $t > 0$ mit dem Charakteristikenverfahren unter den Annahmen, dass $p(x, t) = (v(x, t))^{-1}$, $\rho(x, t) = e^t$, $c \sin(\alpha) = 9/4$ und der Randbedingung $v(0, t) = -1/4, t > 0.$

Hinweis: Sie müssen die Hilfsvariablen nach Auflösen des charakteristischen Systems nicht mehr eliminieren.

Abgabetermin: Montag, den 28.01.2008, 12:30 Uhr

Kriterien für das HM III Testat und Prüfungsanmeldung:

Sie benötigen für das HM III Testat auf den ersten 12 Übungsblättern mindestens 160 Punkte und zusätzlich mindestens 8 Blätter mit mindestens 5 Punkten.

Sollten Sie dieses Kriterium erfüllen, wird Ihr Testat elektronisch ins Studienbüro gemeldet. Die Liste der ans Studienbüro gemeldeten Testate wird ab Freitag, den 1. Februar, im Mathegebäude 20.30 neben den Einwurfkästen am Fenster aushängen. Ab dem 4. Februar können Sie sich im Studienbüro den Anmeldezettel zur HM III Klausur am Samstag, den 15. März, abholen.

Vom 11. bis zum 29. Februar können Sie sich durch Einwerfen Ihres Anmeldezettels in den dafür vorgesehenen Einwurfkasten vor Zimmer 208.1 im Mathegebäude 20.30 zur HM III Klausur anmelden. Sie erhalten keine Anmeldebestätigung. Einige Tage vor der Klausur wird an der Pinwand vor Zimmer 208.1 eine Sitzverteilung aushängen.

Bitte beachten Sie:

Sollten Sie kein Testat erhalten haben, können Sie am 6. Februar, 8. Februar, 11. Februar und 13. Februar zwischen 13 und 14 Uhr ins Zimmer 206.1 kommen, um dieses Problem zu klären. Zusätzlich können Sie in den Saaltutorien am 6. und 13. Februar Testatsprobleme lösen. Bitte halten Sie sich an diese Termine!