Institut für Algebra und Geometrie
Universität Karlsruhe (TH)
Prof. Dr. Andreas Kirsch
Dr. Anastasia August
Dipl.-Math. Armin Lechleiter

Karlsruhe, den 2.11.2007

Gruppen-Nr.: ......

Matrikel-Nr.: ....

Matrikel-Nr.: ....

2. Übung
zur Vorlesung Höhere Mathematik III für mach/mage/biw/ciw/vt

Aufgabe 6: a) Berechnen Sie die Ableitung $f'(x)$ und den Gradienten ∇f für die Funktion

$$f(x_1, x_2, x_3) := \frac{x_1}{\cos(x_1 + x_2 + 2x_3)}.$$

b) Was ist die Ableitung (d.h. die Jacobimatrix) der Funktion $g(x_1, x_2, x_3) := \dfrac{(x_1, x_2, x_3)^\top}{1 + x_1 + x_2 + x_3}$?

Aufgabe 7: Gegeben ist die Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1 \cos x_2 \cos x_3, \quad x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}.$$

Berechnem Sie den Gradienten $\nabla f(x)$ und die Hessematrix $H_f(x) = \left(\dfrac{\partial^2 f(x)}{\partial x_j \partial x_i} \right)_{i,j=1,2,3}$ (d.h. die Matrix, deren Einträge die zweiten partiellen Ableitungen von f sind).

Aufgabe 8: Gegeben ist die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ durch

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} \dfrac{x_1^3 x_2 - x_1 x_2^3}{x_1^2 + x_2^2}, & x \neq (0,0)^\top, \\ 0, & x = (0,0)^\top \end{cases} .$$

Bestimmen Sie mit der Definition die partiellen Ableitungen $\dfrac{\partial f}{\partial x_1}(0,t)$ und $\dfrac{\partial f}{\partial x_2}(t,0)$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Berechnen Sie ferner $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(0,0)$ sowie $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(0,0)$. Welche Voraussetzung des Satzes von Schwarz ist verletzt?

Aufgabe 9: Gegeben sind die Vektorfelder $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ und $G : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit

$$\begin{aligned} F(x,y) &= \left(3\cos(x+y) - 3x\sin(x+y), -3x\sin(x+y) - \frac{2}{y^3} \right)^\top, \\ G(x,y,z) &= \left(2y^2 + z^3 \cos x, 4xy + 1, 3z^2 \sin x \right)^\top. \end{aligned}$$

Bestimmen Sie Potentiale zu F und G, d.h. Funktionen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $\nabla f = F$ und $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mit $\nabla g = G$.

Aufgabe 10: Zeigen Sie, dass die folgenden Differentialgleichungen exakt sind und berechnen Sie die allgemeine Lösung in der Form $f(x,y) = C$:

a) $3x^2(y(x))^2 + 2y(x) - 1 + (2x^3 y(x) + 2x)y'(x) = 0$,

b) $2xe^{y(x)} - 1 + (x^2 e^{y(x)} + 1)y'(x) = 0$.

Abgabetermin: Montag, den 12.11.2007, 11:00 Uhr