Gruppe

Universität Karlsruhe (TH)
Prof. Dr. Andreas Kirsch
Dr. Anastasia August
Dipl.-Math. Armin Lechleiter

11	12	13	14	15	$\sum$

Karlsruhe, den 9.11.07

Mat.-Nr.: . . . .

Mat.-Nr.: . . . .

Mat.-Nr.: . . . .

3. Übung
zur Vorlesung Höhere Mathematik III für mach/mage/biw/ciw/vt

Aufgabe 11: Lösen Sie die Differentialgleichung

$$u'(x) = -\frac{x(1-u(x))}{u(x)+x^2}, \qquad x \in \mathbb{R},$$

mit Hilfe eines integrierenden Faktors (Eulerschen Multiplikators) $\lambda = \lambda(t)$, $t = x^2 + u^2$, in impliziter Form.

Aufgabe 12: Bestimmen Sie alle Lösungen der Differentialgleichung

$$e^{-x^2} + \left(\frac{1}{y(x)}\int_0^x e^{-t^2}\ dt + 1\right) y'(x) = 0$$

in impliziter Form. Es existiert ein integrierender Faktor, der nur von einer Variablen abhängt.

Aufgabe 13: Gegeben sei die Gleichung

$$x - y^2 + 1 = 0, \qquad x, y \in \mathbb{R}.$$

(a) Durch die Gleichung ist eine Kurve in $\mathbb{R}^2$ definiert. Fertigen Sie eine Skizze davon an.

(b) Prüfen Sie mit dem Satz über implizite Funktionen, ob durch die angegebene Gleichung um $(x^{(1)}, y^{(1)}) = (3,2)$ bzw. um $(x^{(2)}, y^{(2)}) = (-1,0)$ eine Funktion $y = \phi(x)$ definiert ist.

(c) Interpretieren Sie das Ergebnis von (b) mit Hilfe Ihrer Skizze aus (a): Warum kann die Gleichung $x - y^2 + 1 = 0$ in einer Umgebung der zwei angegebenen Punkte (gegebenenfalls: nicht) nach y aufgelöst werden?

Aufgabe 14: Wir betrachten die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x_1, x_2) = e^{x_1 x_2} + x_1^2 + 2x_2^2.$$

Zeigen Sie, dass sich die Gleichung $f(x_1, x_2) = e^{\sqrt{6}} + 7$ in einer Umgebung des Punktes $(\sqrt{3}, \sqrt{2})^\top$ nach x_2 auflösen läßt, dass also eine Funktion ϕ existiert mit $f(x_1, \phi(x_1)) = e^{\sqrt{6}} + 7$ für x_1 in einer gewissen Umgebung von $\sqrt{3}$. Wie oft ist ϕ stetig differenzierbar? Berechnen Sie das Taylorpolynom erster Ordnung von ϕ an der Stelle $\sqrt{3}$.

Aufgabe 15: Prüfen Sie, ob Satz 1.19 aus der Vorlesung eine Aussage darüber macht, ob die folgenden Funktionen auf ihrem Definitionsgebiet globale Maxima besitzen. Erklären Sie auch, welche Voraussetzungen des Satzes erfüllt und welche verletzt werden.

(a) $f : D_a \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ D_a = \{x \in \mathbb{R}^3,\ 1 \le |x_1| \le 2,\ 1 \le |x_2| \le 2,\ 1 \le |x_3| \le 2\}, \quad f(x) = \|x\|_2^{-1}$.

(b) $f : D_b \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ D_b = \{x \in \mathbb{R}^3,\ 1 \le |x_1| \le 2\}, \quad f(x) = \|x\|_2^{-1}$.

(c) $f : D_c \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ D_c = \{x \in \mathbb{R}^3,\ 1 < |x_1| < 2,\ 1 \le |x_2| \le 2,\ 1 \le |x_3| \le 2\}, \quad f(x) = \|x\|_2^{-1}$.

(d) $f : D_d \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ D_d = \{x \in \mathbb{R}^3,\ |x_1| \le 1,\ |x_2| \le 1,\ |x_3| \le 1\}, \quad f(x) = \begin{cases} \|x\|_2^{-1}, & x \neq 0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$.

Abgabetermin: Montag, den 19.11.07, 12:30 Uhr