Gruppe

Universität Karlsruhe (TH)
Prof. Dr. Andreas Kirsch
Dr. Anastasia August
Dipl.-Math. Armin Lechleiter

21	22	23	24	25	$\sum$

Karlsruhe, den 23.11.2007

Mat.-Nr.: ....

Mat.-Nr.: ....

Mat.-Nr.: ....

5. Übung
zur Vorlesung Höhere Mathematik III für mach/mage/biw/ciw/vt

Aufgabe 21: Finden Sie den Punkt auf dem Kreis $x^2 + (y-2)^2 = 1$, der den kürzesten Abstand zu der Geraden $x = y$ hat.

Aufgabe 22: Gegeben sei die Menge $M := \{x \in \mathbb{R}^3 : x_j > 0, j = 1,2,3\}$ und die Funktion $f : M \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = x_1 + x_2 + x_3.$$

Bestimmen Sie das Minimum von f unter der Nebenbedingung $\dfrac{a}{x_1} + \dfrac{b}{x_2} + \dfrac{c}{x_3} = 1$ $(a,\, b,\, c > 0)$.

Aufgabe 23: Es soll der Schnittpunkt zwischen der Geraden $y = x/3 + 2$ und dem Graphen der Funktion $f(x) = \tan(x)$ mit Hilfe einer Fixpunktiteration berechnet werden.

(a) Warum wird die Fixpunktiteration mit Startwert $x_0 = 1$ zur Fixpunktgleichung $x = 3(\tan(x) - 2)$ nicht konvergieren? Bestimmen Sie die ersten 5 Glieder der Iterationsfolge auf 4 Stellen gerundet.

(b) Betrachten Sie die Fixpunktgleichung $\arctan(x/3 + 2) = x$ und zeigen Sie, dass die zugehörige Fixpunktiteration konvergiert. Wieviele Iterationsschritte sind mit Startwert $x_0 = 1$ hinreichend, um den Fixpunkt $\hat{x}$ auf vier Nachkommastellen genau zu berechnen?

Aufgabe 24: (a) Es seien $D \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge, $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion und die Punkte $x, y \in \mathbb{R}^n$ so, dass die Verbindungsgerade $\Gamma := \{ty + (1-t)x :\ t \in [0,1]\}$ ganz in D liegt. Zeigen Sie, dass es ein $t_0 \in [0,1]$ gibt, so dass $f(x) - f(y) = f'\big(t_0 x + (1-t_0)y\big)(x-y)$. Folgern Sie, dass $|f(x) - f(y)| \le \max_{z\in\Gamma} \sum_{i=1}^n \left|\frac{\partial f}{\partial x_i}(z)\right|\ \|x-y\|_\infty$.

(b) Sei nun $f(x_1,x_2) := \Big((1-x_2^2)^{1/2},\ \frac{1}{\sqrt{21}}(9-5x_1^2)^{1/2}\Big)^\top$. Zeigen Sie mit Hilfe des Banachschen Fixpunktsatzes, dass f in der Menge $M := [4/5, 1] \times [0, 3/5] \subset \mathbb{R}^2$ einen Fixpunkt besitzt.

Hinweis: (a) Benutzen Sie $F(t) := f(tx + (1-t)y)$ und den Mittelwertsatz für skalare Funktionen (Satz 6.24 HM1).

Aufgabe 25: Gegeben sei das LGS $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 3 & 2 \\ 2 & 7 & 1 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 8 \\ 14 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

(a) Setzen Sie $D \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ als die Diagonalmatix mit den Diagonalelementen von A. Bestimmen Sie die Matrix $M := I - D^{-1}A$ und den Vektor $q := D^{-1}b$.

(b) Der $\mathbb{R}^3$ sei nun ausgestattet mit der Maximumsnorm $\|\cdot\|_\infty$. Zeigen Sie, dass die Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit $f(x) = Mx + q$ die Voraussetzungen des Banachschen Fixpunktsatzes erfüllt und bestimmen Sie die Kontraktionszahl.

(c) Warum ist der Fixpunkt $\hat{x}$ von f gerade die Lösung des LGS $Ax = b$?

(d) Führen Sie, ausgehend vom Startwert $(0,0,0)^\top$, einen Schritt des Iterationsverfahrens durch. Wieviele Schritte sind hinreichend, um die Komponenten von $\hat{x}$ mit einem maximalen Fehler von 10^{-2} zu bestimmen?

Abgabetermin: Montag, den 3.12.2007, 12:30 Uhr