Gruppe

Universität Karlsruhe (TH)
Prof. Dr. Andreas Kirsch
Dr. Anastasia August
Dipl.-Math. Armin Lechleiter

36	37	38	39	40	$\sum$

Karlsruhe, den 14.12.2007

Mat.-Nr.: ....

Mat.-Nr.: ....

Mat.-Nr.: ....

8. Übung
zur Vorlesung Höhere Mathematik III für mach/mage/biw/ciw/vt

Aufgabe 36: (a) Begründen Sie, welche der folgenden Funktionen $f, g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ein Potential besitzen und geben Sie gegebenenfalls eines an.

$$f(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} x_2^2 + 2x_1x_2x_3^2 \\ 2x_2 + x_1^2x_3^2 \\ x_2^2 + 3x_1^2x_2x_3^2 \end{pmatrix}, \qquad g(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} x_3^2 \\ e^{x_3} \\ x_2e^{x_3} + 2x_1x_3 \end{pmatrix}.$$

(b) Die Kurve C sei die Strecke von $(1, 0, 0)$ nach $(0, 1, 0)$. Geben Sie eine Parametrisierung nach der Bogenlänge an und berechnen Sie für diese Parametrisierung $\int_C f(x) \cdot ds$ und $\int_C g(x) \cdot ds$. Die Kurve D sei nun über die Parametrisierung $x(t) = (1 - t, t^2, 0)$, $t \in [0, 1]$ definiert. Begründen Sie, welche der beiden folgenden Aussagen auf jeden Fall richtig ist:

$$\int_C f(x) \cdot ds = \int_D f(x) \cdot ds \qquad \int_C g(x) \cdot ds = \int_D g(x) \cdot ds.$$

Aufgabe 37: Wir betrachten noch einmal den Torus aus Aufgabe 35, dessen Oberfläche F durch

$$Y(\phi, \theta) = ((a + R\cos\phi)\cos(\theta),\ (a + R\cos(\phi))\sin(\theta),\ R\sin(\phi))^\top, \qquad \phi, \theta \in [0, 2\pi),\ 0 < R < a,$$

beschrieben wird. Berechnen Sie den Flächeninhalt von F und das Oberflächenintegral $\int_F f\, do$ für $f(x_1, x_2, x_3) = -3x_1^2x_3$.

Aufgabe 38:

Unter dem *Vivianischen Fenster* $S \subset \mathbb{R}^3$ versteht man denjenigen Teil der Halbsphäre H vom Radius $R > 0$

$$H : x^2 + y^2 + z^2 = R^2, \quad z \geq 0, \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,$$

der von dem Zylinder

$$Z : \left(x - \frac{R}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{R^2}{4}$$

herausgestanzt wird (Skizze!). Man berechne den Flächeninhalt von S durch Verwendung von Polarkoordinaten in der $(x$-$y)$-Ebene.

Aufgabe 39: Berechnen Sie den Fluss des Vektorfeldes $F(x_1, x_2, x_3) = (x_1x_2^2, x_1^2x_2, x_2)^\top$ durch den Rand des Körpers $K = \{(x_1, x_2, x_3)^\top \in \mathbb{R}^3,\ x_1^2 + x_2^2 \leq 1,\ x_3^2 \leq 1\}$ direkt und mit Hilfe des Gaußschen Integralsatzes.

Aufgabe 40: Gegeben sei das Vektorfeld $F = (2x, y^2, z^2)^\top$. Berechnen Sie den Fluss des Vektorfeldes F durch den Rand der Halbkugel (mit Boden!)

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, \quad z \geq 0,$$

zuerst direkt und dann mit Hilfe des Gaußschen Integralsatzes.

Abgabetermin: Montag, den 7.1.2008, 12:30 Uhr