Gruppe

Universität Karlsruhe (TH)
Prof. Dr. Andreas Kirsch
Dr. Anastasia August
Dipl.-Math. Armin Lechleiter

41	42	43	44	45	$\sum$

Karlsruhe, den 21.12.2007

Mat.-Nr.: ....

Mat.-Nr.: ....

Mat.-Nr.: ....

9. Übung
zur Vorlesung Höhere Mathematik III für mach/mage/biw/ciw/vt

Aufgabe 41: Berechnen Sie den Flächeninhalt der *Astroide* mit dem Rand

$$C:\ x(t) = (2\cos^3 t, 2\sin^3 t), \qquad t \in [0, 2\pi],$$

mit dem Gaußschen Integralsatz im $\mathbb{R}^2$.

Hinweis: Betrachten Sie das Vektorfeld $F(x) = (x_1, 0)^\top$.

Aufgabe 42: Folgern Sie aus dem Gaußschen Satz die Regel der partiellen Integration

$$\iiint\limits_K f(x)\frac{\partial g}{\partial x_j}(x)\,dx = \iint\limits_{\partial K} f(x)g(x)\nu_j(x)do - \iiint\limits_K \frac{\partial f}{\partial x_j}(x)g(x)dx, \qquad j = 1,2,3.$$

Dabei ist $\nu(x)$ der äußere Normaleneinheitsvektor von $K \subset \mathbb{R}^3$ und $j \in \{1,2,3\}$. Welche Glattheitsbedingungen muß man für diese Formel an f, g und K stellen?

Aufgabe 43: Wenden Sie die Differentialoperatoren div und rot in Zylinderkoordinaten auf das Vektorfeld $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $x \mapsto (x_2x_3, x_1^2, 1)^\top$ an.

Hinweis: In Zylinderkoordinaten gilt für Divergenz und Rotation eines Vektorfeldes $\hat{F}(r,\varphi,z)$

$$\operatorname{div}\hat{F} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\hat{F}_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial \hat{F}_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial \hat{F}_z}{\partial z}$$

$$\operatorname{rot}\hat{F} = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial \hat{F}_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial \hat{F}_\varphi}{\partial z}\right)\mathbf{e}_r + \left(\frac{\partial \hat{F}_r}{\partial z} - \frac{\partial \hat{F}_z}{\partial r}\right)\mathbf{e}_\varphi + \left(\frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r\hat{F}_\varphi\right) - \frac{\partial \hat{F}_r}{\partial \varphi}\right]\right)\mathbf{e}_z.$$

Aufgabe 44: Zeigen Sie für stetig differenzierbare Vektorfelder X und $Y : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ sowie eine differenzierbare Funktion $a : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ die folgenden Identitäten:

$$\operatorname{rot}(aX) = a\cdot\operatorname{rot}X - X \times \nabla a, \quad \operatorname{div}(X\times Y) = Y\cdot\operatorname{rot}X - X\cdot\operatorname{rot}Y, \quad \operatorname{rot}\operatorname{rot}X = \nabla(\operatorname{div}X) - \Delta X.$$

Hinweis: ΔX ist erklärt durch $\Delta X = (\Delta X_1, \Delta X_2, \Delta X_3)^\top$.

Aufgabe 45: Sei $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ gegeben durch $F(x) := \left(x_1^2 + x_1x_2, x_1^2/2 + x_2 + ax_3, bx_2\right)^\top$. Bestimmen Sie den Parameter b in Abhängigkeit von a so, dass F konservativ ist. Berechnen Sie in diesem Fall ein Potential zu F und außerdem die Rotation des Felds F!

Abgabetermin: Montag, den 14.1.2007, 12:30 Uhr